ALEX

BELLOS

Le cercle des problèmes incongrus

3000 ans d'énigmes mathématiques

Trouvez l'intrus !

Champs sciences

ALEX BELLOS
Le cercle des problèmes incongrus

Subtiles, addictives, incroyables, piquantes… Voici cent énigmes sélectionnées par le vulgarisateur scientifique hors pair Alex Bellos. Toutes sont résolues en détail et n'exigent qu'un peu d'acharnement, sans oublier une bonne dose de logique et… d'humour ! Non content d'occuper nos esprits (et nos journées), Alex Bellos en profite aussi pour passer à la moulinette 3000 ans de maths.

D'une énigme à l'autre, il dresse le portrait des inventeurs de ces casse-tête incongrus, repère les classes de problèmes et débusque les idées reçues. Plaisir garanti !

Alex Bellos a voué sa vie au foot et à la vulgarisation scientifique, qu'il pratique au *Guardian*, à la BBC et dans ses divers best-sellers dont *Alex au pays des chiffres* (« Champs », 2015) et *Alex et la magie des nombres* (« Champs », 2019).

Traduit de l'anglais (Royaume-Uni) par Olivier Courcelle.

« Une compilation des meilleurs jeux d'esprit et énigmes mathématiques. » *Sciences et Avenir*

« Un modèle du genre. » *Le Monde*

La réponse était

Cette forme est la seule à partager un point commun avec chacune de ses voisines !

En couverture : © Curly Pat/Shutterstock ; © Anna Zasimova/Shutterstock.

Flammarion

21-IV Création Studio Flammarion

LE CERCLE
DES PROBLÈMES INCONGRUS

Alex Bellos

LE CERCLE DES PROBLÈMES INCONGRUS

3 000 ans d'énigmes mathématiques

Traduit de l'anglais (Royaume-Uni)
par Olivier Courcelle

Champs sciences

Copyright © 2016 by Alex Bellos
Tous droits réservés.
Illustrations © Andrew Joyce, 2016
Toute reproduction totale ou partielle, sans autorisation expresse
des Éditions Flammarion, est interdite.
L'ouvrage original a paru en 2016 sous le titre
Can You Solve My Problems ? aux Éditions Faber & Faber.

Pour la traduction française :
© Flammarion, 2018
© Flammarion, 2021, pour l'édition « Champs »
ISBN : 978-2-0802-4352-2

À Zak

Introduction

Tous mes problèmes ont commencé avec Cheryl.

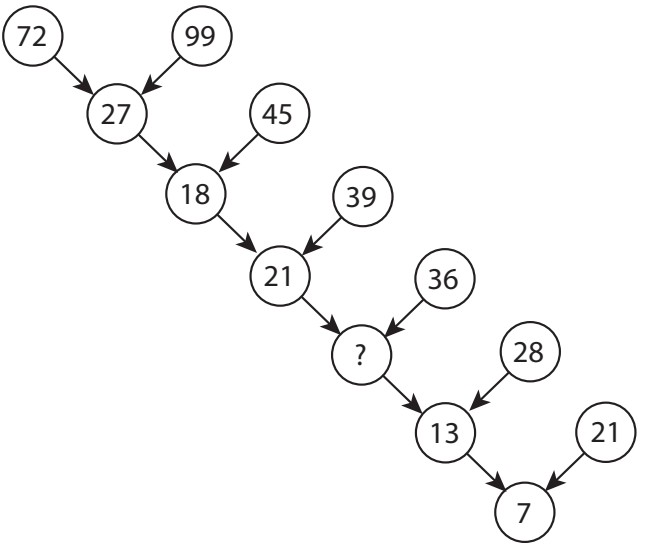
C'était une fille compliquée. Mais magnétique. Le genre à vous faire tourner la tête. J'étais comme ensorcelé, je ne pouvais pas m'empêcher de penser à elle. Je vais vous faire une confession : elle a bouleversé le cours de ma vie.

Il est temps que je précise : Cheryl n'est pas une vraie personne. C'est l'héroïne d'une question posée lors d'un examen de mathématiques à Singapour. Ce problème m'a captivé et m'a poussé à explorer le monde des casse-tête. Cela a été le point de départ de ce livre.

Vous trouverez le problème de l'Anniversaire de Cheryl – et l'histoire complète de nos relations – plus bas dans le texte (Problème 21, p. 49). Mais avant d'embarquer pour un voyage à travers mes casse-tête mathématiques préférés, voici deux énigmes pour se mettre en jambes.

Observez d'abord l'illustration page suivante. La disposition des nombres suit une certaine règle. Une fois que vous l'aurez découverte, trouvez le nombre manquant. Ah oui, j'oubliais : dans le dernier cercle, sept n'est pas une coquille typographique.

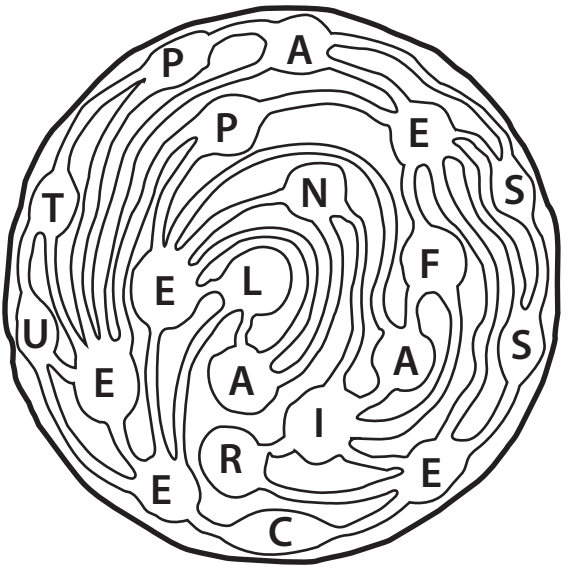
Je trouve ce casse-tête irrésistible. Il ne demande aucune connaissance mathématique avancée. Il n'a l'air de rien,



mais si vous vous lancez dans sa résolution, il se met à vous hanter et ne vous lâche plus. Et lorsque vous finissez par le résoudre (si vous y arrivez), vous éprouvez un intense sentiment de satisfaction, aussi exaltant qu'addictif. Nob Yoshigahara, célèbre créateur de casse-tête du XXe siècle, le considérait comme son chef-d'œuvre du genre. Essayez par vous-même de trouver la solution avant que je la révèle, à la fin de cette section.

Passons aux Canaux de Mars. Voici une carte des villes et des canaux récemment découverts sur la planète rouge. En partant de la ville marquée C, près du pôle Sud, voyez si vous pouvez former une phrase complète en français en parcourant toutes les villes une seule fois avant de revenir au point de départ.

Ce problème, dû au prolifique concepteur de casse-tête américain Sam Loyd, date de plus de cent ans. Selon son propre témoignage : « Lors de la parution originale du casse-tête dans un journal, plus de cinquante mille lecteurs écrivirent : "Cela ne peut pas se faire." Il est pourtant très



simple ! » N'allez pas consulter immédiatement la solution plus bas : vous vous gifleriez de ne pas l'avoir découverte par vous-même.

Si vous vous êtes arrêté pour réfléchir à l'un ou l'autre de ces problèmes, je n'ai guère besoin de vous expliquer pourquoi les casse-tête sont si amusants. Ils nous emportent. Quand vous cherchez à en résoudre un, le monde autour de vous s'évanouit à mesure que votre concentration s'accroît… Or, mettre à l'épreuve sa perspicacité est valorisant. Les casse-tête sont source de réconfort dans la mesure où ils exigent de suivre un raisonnement à base d'étapes logiques simples, surtout dans un contexte quotidien qui manque si souvent de cohérence. Dans les bons casse-tête, la solution paraît à portée de main et l'atteindre est très gratifiant.

Entre autres conséquences de ma renversante rencontre avec Cheryl, j'ai commencé à tenir une rubrique de casse-tête pour la version en ligne du *Guardian*. Afin de dégotter

la crème de la crème en la matière, j'ai beaucoup lu et correspondu avec des créateurs de puzzles mathématiques, professionnels ou amateurs. Si j'ai toujours apprécié les casse-tête mathématiques, je n'avais jamais, avant d'entreprendre cette recherche, pris conscience de leur diversité, de leur profondeur conceptuelle et de leur riche histoire. J'ai ainsi compris, par exemple, que les mathématiques il y a mille ans servaient principalement – hormis à de tristes tâches commerciales comme le comptage et la mesure – à amuser et distraire. (La position reste tenable aujourd'hui en ce sens que le nombre d'amateurs enthousiastes de sudokus excède de loin le nombre de mathématiciens professionnels.) L'histoire des casse-tête chemine en parallèle avec celle des mathématiques ; elle est allée de pair avec les grandes découvertes et a inspiré les esprits les plus créatifs.

Ce livre présente un florilège de 124 jeux d'esprit glanés sur les deux derniers millénaires. Pour certains, vous découvrirez leur origine et l'influence qu'ils ont eue sur l'univers des mathématiques. J'ai choisi les casse-tête que je trouvais les plus fascinants, divertissants et stimulants pour l'esprit. Ils ne sont mathématiques que dans l'acception la plus large du terme : si leur résolution demande une pensée logique, elle ne requiert pas de connaissances universitaires.

Ces problèmes viennent de la Chine antique, de l'Europe médiévale, de l'Angleterre victorienne ou du Japon d'aujourd'hui, entre autres lieux et autres époques. Certains sont des devinettes ancestrales, d'autres ont été conçus par les meilleurs mathématiciens de leur temps. Souvent, toutefois, l'origine des casse-tête est difficile à déterminer. Comme les histoires drôles ou les contes traditionnels, ils évoluent sans cesse, portés par les embellissements, les adaptations, les simplifications, les augmentations et les réinterprétations propres à chaque nouvelle génération.

Les meilleurs casse-tête sont de purs poèmes. Élégants et concis, ils piquent notre intérêt, défient notre esprit de compétition, testent notre ingéniosité, tout en révélant parfois des vérités universelles. Une bonne énigme ne demande aucun savoir pointu – seulement de la créativité, de l'astuce et une capacité à penser clairement. Les casse-tête nous captivent en titillant cette pulsion bien humaine de comprendre le monde ; quelque chose qui n'avait aucun sens tout à coup en acquiert un. Même si les casse-tête paraissent frivoles ou artificiels, la stratégie destinée à en venir à bout enrichit notre arsenal de défense pour répondre à d'autres défis de la vie.

Le plus important reste toutefois que les casse-tête assouvissent notre passion du jeu intellectuel. Ils nous amusent. Ils s'adressent à notre part de curiosité enfantine. J'ai choisi des problèmes dans des styles aussi divers que possible, et qui demandent des stratégies variées. Certains se résolvent sur un éclair de perspicacité, d'autres en suivant son instinct et d'autres encore en… – mais chut, pas trop d'indices.

Chaque chapitre porte sur un thème, et les problèmes qu'il contient sont en gros classés par ordre chronologique. *Pas par ordre de difficulté*. Évaluer le niveau d'un casse-tête est souvent une tâche délicate : un problème face auquel une personne va se triturer les méninges des heures durant paraîtra élémentaire à telle autre et *vice versa*. J'explique comment résoudre quelques problèmes, donne certains indices pour quelques autres, mais pour le reste vous serez livré à vous-même. (Les solutions se trouvent à la fin du livre.) Certains problèmes sont simples. Quelques-uns sont à se gratter la tête jusqu'au sang durant des jours ! Ces hauts sommets sont signalés par le symbole .

Quand bien même vous ne parviendriez pas à les résoudre, j'espère que vous trouverez les solutions aussi fascinantes que

leurs énoncés. Le plaisir vient aussi de la révélation d'une technique, d'une idée ou de ses conséquences.

Chaque chapitre est précédé d'une rafale de dix questions destinées à vous plonger dans l'ambiance. Les premier, troisième et cinquième chapitres commencent ainsi par des questions de difficulté croissante, posées au concours annuel pour écoliers âgés de 11 à 13 ans du Mathematics Trust, une organisation caritative britannique visant à soutenir l'éducation mathématique des plus jeunes. Eh oui, 10 questions *pour enfants*. Vous vous en sortirez ?

Revenons maintenant à nos deux casse-tête déjà proposés.

Notre regard sur le premier diagramme se porte d'abord naturellement sur le côté supérieur gauche. Alors comment 72 et 99 peuvent-ils faire 27 ?

Vous y êtes ! 99 – 72 = 27

En d'autres termes, le nombre d'un cercle est la différence des nombres dans les deux cercles qui pointent vers lui.

Regardez, cette règle vaut pour 18, le nombre de la ligne du dessous :

45 – 27 = 18

Et avec 21 :

39 – 18 = 21

Le nombre manquant doit donc être la différence entre 21 et 36, c'est-à-dire 15.

36 – 21 = 15

Par souci d'exhaustivité, descendons encore l'arbre :

28 – 15 = 13

Super, ça marche encore. Nous sommes presque au bout. Mais BOUM !

Le tout dernier nombre est 7, distinct de la différence entre 13 et 21, les deux nombres qui pointent vers lui.

Catastrophe ! Notre première hypothèse était fausse. Le nombre dans un cercle ne vaut pas la différence des deux

nombres qui pointent vers lui. Yoshigahara nous a habilement montré un chemin pour mieux nous perdre.

Reprenons au début. Comment 72 et 99 peuvent-ils donner 27 autrement ?

La réponse est si simple que vous l'avez peut-être manquée :

7 + 2 + 9 + 9 = 27

L'addition de tous les chiffres.

Et ça marche pour la ligne suivante :

2 + 7 + 4 + 5 = 18

Et la suivante. Le nombre manquant doit donc être :

2 + 1 + 3 + 6 = 12

Et les deux derniers cercles s'accordent cette fois avec les autres :

1 + 2 + 2 + 8 = 13

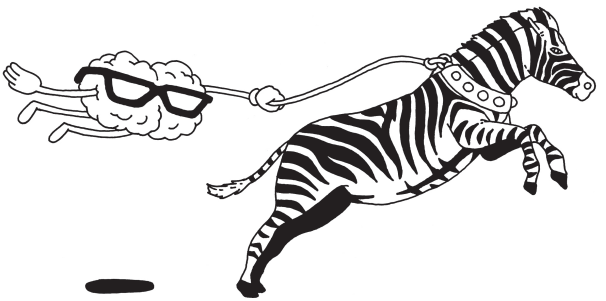
1 + 3 + 2 + 1 = 7

La folle ingéniosité de ce casse-tête tient à ce que Yoshigahara a trouvé deux règles arithmétiques donnant les mêmes résultats aux *cinq* premières itérations avant de différer à la sixième, et ce d'une seule unité. La facilité déconcertante avec laquelle nous nous propulsons dans la mauvaise direction paraît presque surnaturelle. Un problème difficile n'est souvent qu'un problème abordé d'une mauvaise façon. Prenez-en de la graine !

Avez-vous résolu le casse-tête des Canaux de Mars ? Vous pouvez enchaîner les lettres de manière à écrire : « Cela ne peut pas se faire. » Comme les lecteurs l'ont écrit à Sam Loyd ! La leçon à retenir ici, c'est qu'il faut savoir lire avec attention l'énoncé du problème.

Partons donc nous casser la tête !

PROBLÈMES LOGIQUES



Des choux,
des époux infidèles
et un zèbre

Êtes-vous plus intelligent qu'un enfant de 11 ans ?

Règlement de la classe : les calculatrices sont interdites.

1) L'illustration ci-dessous représente un même cube vu sous trois angles différents. Quelle lettre se situe face au U ?

A I **B** P **C** K **D** M **E** O

2) Le nez de Pinocchio mesure 5 cm de long et double de longueur à chaque mensonge proféré.

Après neuf mensonges, ce nez aura une taille du même ordre que :

A un domino **B** une raquette de tennis **C** une table de billard **D** un court de tennis **E** un terrain de football.

3) Le mot « trente » est formé de 6 lettres, et 30 = 6 × 5. De même, le mot « quarante » est formé de 8 lettres, et 40 = 5 × 8.

Parmi les nombres suivants, lequel n'est pas un multiple du nombre de lettres dont il est formé ?

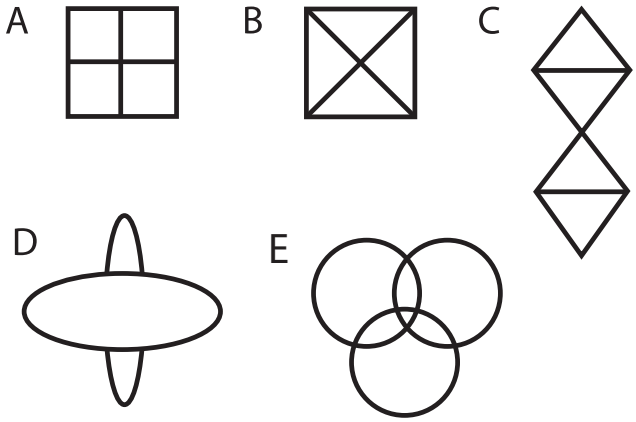
A 6 **B** 8 **C** 12 **D** 20 **E** 100

4) Amy, Ben et Chris se tiennent alignés.

Si Amy est à la gauche de Ben, et Chris à la droite d'Amy, laquelle de ces affirmations est vraie ?

A Ben est le plus à gauche **B** Chris est le plus à droite **C** Amy est au milieu **D** Amy est la plus à gauche **E** aucune des affirmations **A B C D** n'est vraie

5) Laquelle des figures ci-dessous peut être tracée sans lever le crayon et sans jamais repasser deux fois sur une même ligne ?



6) Quel est le reste de la division de 354 972 par 7 ?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

7) Les enfants d'une famille ont tous au moins un frère et une sœur.

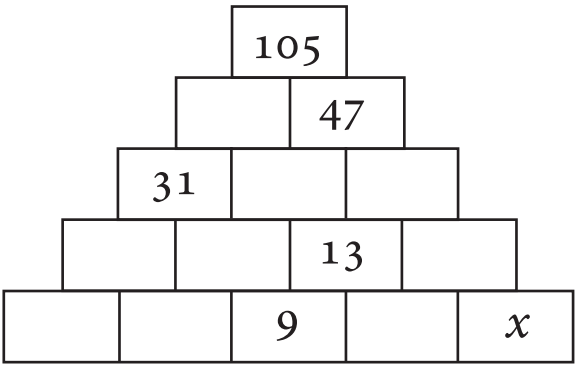
Combien cette famille possède-t-elle d'enfants au minimum ?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

8) Le nombre 987 654 321 est multiplié par 9. Combien de fois le chiffre 8 apparaît-il dans le résultat ?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 9

9) Dans la pyramide partiellement remplie qui suit, chaque rectangle doit contenir la somme des deux nombres immédiatement placés sous lui. Combien vaut x ?



A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 7 **E** 12

10) Combien de chiffres distincts présente le développement décimal de 20/11 ?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

La logique. Pas illogique de commencer par là : tous les casse-tête reposent sur la déduction. Pour une simple raison : la logique est au fondement de toutes les mathématiques. Au pays des casse-tête, toutefois, la nomenclature « problèmes logiques » désigne spécifiquement des énigmes qui se résolvent à la *Hercule Poirot*, avec comme arme le seul raisonnement déductif – sans calcul ou autre croquis tracé au dos d'une enveloppe traînant par là, par exemple. Ces problèmes sont à la portée de tous, car ils n'exigent aucune connaissance technique. Ce qui ne gâche rien, leur simplicité se prête souvent à une formulation humoristique. Ce qui ne signifie pas, loin de là, qu'ils soient toujours faciles à résoudre. Attention à ne pas vous retourner de neurones !

Les êtres humains se sont frottés aux problèmes logiques au moins depuis l'époque de Charlemagne, il y a plus de mille ans.

En 799, alors qu'il régnait sur la majeure partie de l'Europe occidentale, Charlemagne reçut une lettre d'Alcuin, son conseiller, qui lui écrivait : « Je vous ai envoyé des curiosités arithmétiques pour vous amuser. »

Alcuin était le plus grand savant de son temps. Après avoir grandi à York, il avait suivi puis dirigé l'enseignement

de l'école de la cathédrale de la ville, alors le meilleur établissement scolaire du pays. Sa réputation arriva jusqu'à Charlemagne. Le roi le persuada de prendre les rênes de l'école palatine à Aix-la-Chapelle. Alcuin y fonda une grande bibliothèque avant d'instaurer une vaste réforme du système éducatif carolingien. Il quitta ensuite la cour de Charlemagne pour devenir abbé de Tours, poste qu'il occupait quand il envoya la fameuse lettre à son ancien patron.

Certains portent au crédit d'Alcuin l'invention de l'écriture cursive, qui lui permettait, ainsi qu'à ses nombreux scribes, d'écrire plus rapidement. Il aurait aussi été le premier à marquer une question par un symbole, en l'occurrence un petit zigwigwi vertical. Que la principale figure du début de l'histoire des casse-tête soit ainsi associée à l'invention du point d'interrogation tombe on ne peut plus à pic !

Même si le document auquel Alcuin faisait référence dans sa lettre n'a pas été conservé, les historiens pensent qu'il s'agissait d'une liste d'environ cinquante problèmes intitulée *Propositiones ad acuendos juvenes*, soit *Problèmes pour aiguiser la jeunesse*, dont le plus vieux manuscrit qui nous est parvenu remonte au IXe siècle. Ils sont convaincus que seul le plus éminent des enseignants de son époque a pu écrire cette somme d'énigmes.

Les *Propositiones* constituent un document remarquable. C'est tout simplement le plus grand recueil de casse-tête de l'époque médiévale, et en outre le premier texte latin à présenter un contenu mathématique. (Les Romains ont beau avoir construit des routes, des aqueducs, des thermes et des égouts, ils n'ont jamais produit de mathématiques.) Il commence comme une bonne blague :

> *Un escargot invité à déjeuner par un roseau doit parcourir une lieue. S'il se déplace d'un pouce par jour, combien de temps lui faudra-t-il ?*

Réponse en tenant compte des unités de mesure de l'époque : 246 ans et 210 jours. L'escargot aurait trouvé la mort plus de deux siècles avant d'atteindre son but.

Autre exemple d'énoncé :

> *Un homme croisant un jour des élèves leur demande : « Combien êtes-vous dans votre école ? » L'un d'eux répond : « Je ne vais pas vous répondre directement mais vous dire comment le savoir : doublez ce nombre d'écoliers, puis triplez le résultat, puis partagez ce résultat en quatre parties. En m'ajoutant à l'un de ces quarts, vous obtiendrez 100. Combien d'élèves sommes-nous dans notre école ? »*

Sales gosses. Je vous laisse cette fois vous débrouiller sans moi, na !

La fantaisie qu'Alcuin instillait dans la formulation était révolutionnaire. Pour la première fois, l'humour servait à piquer l'intérêt des élèves en arithmétique. L'importance des *Propositiones* dépasse toutefois le cadre de ces innovations stylistiques par l'exposition de plusieurs problèmes de type nouveau. Certains d'entre eux exigent seulement de raisonner de façon logique et oublient toute forme de calcul. Le plus connu des casse-tête d'Alcuin a probablement acquis le statut de devinette mathématique la plus célèbre de tous les temps.

1

Un loup, une chèvre et des choux

Un homme doit traverser une rivière avec un loup, une chèvre et un panier de choux. Le seul bateau disponible ne peut transporter au maximum que l'homme et un seul des trois « passagers ». La chèvre ne peut pas rester seule avec le loup sous peine d'être mangée, ni les choux avec la chèvre pour la même raison.

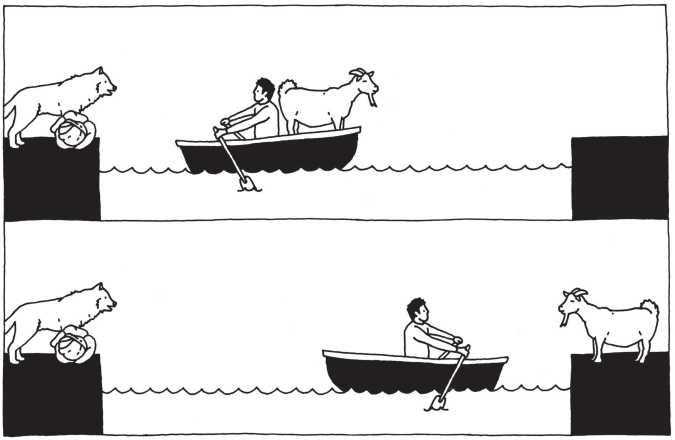
Comment traverser la rivière en un minimum de passages ?

Ce casse-tête est une pure merveille pour deux raisons. D'abord par le comique de situation. Vous avez déjà passé toute la matinée à suivre un chemin de terre en vous efforçant désespérément de tenir le loup hors de portée de la chèvre et la chèvre loin des choux. Et comme si cela ne suffisait pas, voilà que vous devez traverser une rivière sur un bateau ridiculement petit. Mais ce que je trouve de plus amusant et intéressant encore, c'est la solution, qui force notre héros à se comporter de façon contre-intuitive.

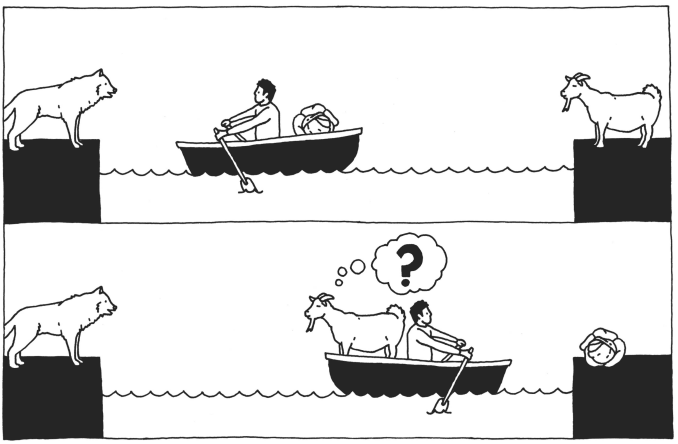
Pourquoi ne pas vous lancer ? Un texte du XIIIe siècle prétend que cette devinette est à la portée d'un enfant de 5 ans. Non, je ne vous mets pas la pression.

Suivez le raisonnement avec moi.

Disons que le voyageur se trouve rive gauche avec ses trois passagers. Il ne peut en prendre qu'un dans le bateau. S'il prend le loup, la chèvre resterait avec les choux et les mangerait. S'il prenait les choux, le loup resterait avec la chèvre et la mangerait. Par élimination, il ne peut donc qu'embarquer la chèvre au premier voyage, car les loups ne mangent pas les choux. Il dépose donc la chèvre rive droite et retourne chercher le passager suivant.

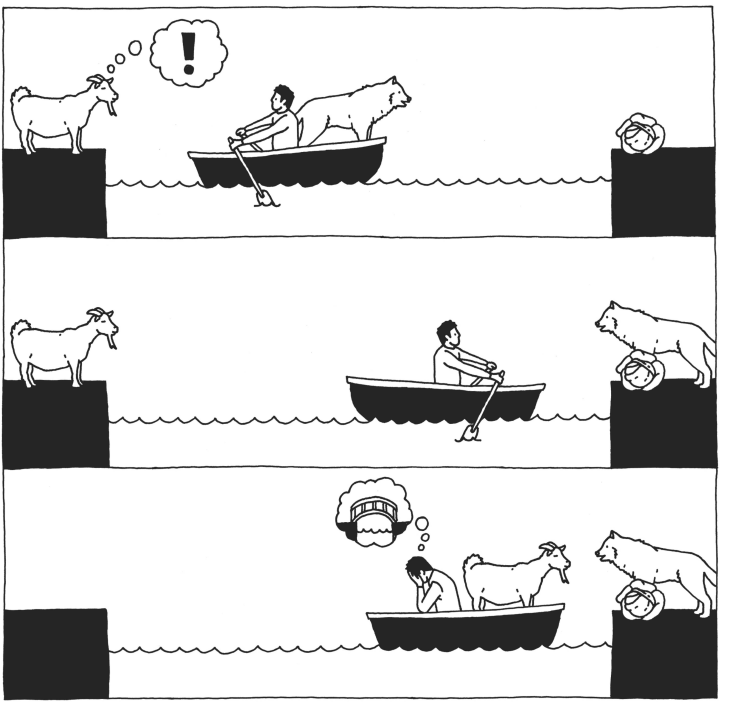


Il a maintenant le choix entre le loup et les choux. Disons qu'il prenne les choux. Il traverse la rivière pour la troisième fois et atteint la rive droite. Il ne peut alors laisser les choux avec la chèvre. Que fait-il alors ? Aucun progrès s'il se contente de retourner avec les choux… Il revient donc avec la chèvre. Cette étape heurte le bon sens : pour que la traversée s'effectue sans encombre pour tous, le voyageur doit transporter l'un de ses passagers, le ramener à la rive de départ, avant de le faire retraverser.



De retour rive gauche après quatre passages, le voyageur se trouve avec le loup et la chèvre. Il enchaîne alors la chèvre et prend à bord le loup pour sa cinquième traversée. Rive droite, le loup reste ensuite avec les choux qui l'indiffèrent. Le voyageur repart quant à lui chercher le ruminant barbu, ce qui lui fait traverser le tout en sept passages.

(Une solution équivalente consiste à prendre le loup au deuxième passage. Par la même logique, le voyageur fait traverser le tout en sept passages.)



Les *Propositiones* présentent d'autres casse-tête de traversée de rivière. Celui qui suit fait un peu penser à une comédie de boulevard.

2

Trois hommes et leurs sœurs

Arrivent devant une rivière trois hommes ayant chacun une sœur. Tout ce petit monde doit franchir le cours d'eau malgré les regards concupiscents que jettent les hommes aux demoiselles. Autre difficulté : le groupe n'a qu'une chaloupe qui ne peut transporter que deux personnes. Comment la troupe doit-elle s'y prendre pour traverser la rivière sans que les sœurs soient frappées par le déshonneur de naviguer avec un homme qui n'est pas leur frère ?

La formulation d'Alcuin est ambiguë dans sa dernière partie. Elle laisse place à deux interprétations possibles :

[1] le bateau ne doit jamais transporter une femme et un autre homme que son frère. Dans ce cas, l'équipée entière peut rejoindre l'autre rive en neuf traversées ;

[2] une femme doit être accompagnée de son frère quand le bateau débarque ou embarque des passagers sur une rive où se trouve un autre homme que son frère. Ce second scénario me paraît plus dans l'esprit du propos. La mission demande alors onze passages. Essayez les deux cas de figure.

Les casse-tête de traversée de rivière font les délices des petits et des très grands enfants depuis plus de mille ans. En se propageant à travers le monde, ils se sont adaptés aux spécificités locales. En Algérie, le loup, la chèvre et les choux se sont mués en un chacal, une chèvre et une botte de foin ; au Liberia, en un guépard, une poule et du riz ; et à Zanzibar, en un léopard, une chèvre et des feuilles. Le casse-tête des trois frères et des trois sœurs a aussi évolué avec le temps : les hommes lubriques ont laissé place à des maris jaloux interdisant à leur femme de prendre le bateau seule avec un autre homme. Dans une version remaniée du XIIIe siècle, les

couples se nomment Bertoldus et Berta, Gherardus et Greta, et Rolandus et Rosa. La solution est livrée sous forme d'un double hexamètre. Si vous connaissez le latin, la voici :

Binae, sola, duae, mulier, duo, vir mulierque,
Bini, sola, duae, solus, vir cum muliere.

Au XVIIe siècle, les couples étaient formés de maîtres et de valets. Chaque maître interdisait à son valet de traverser avec un autre maître, de peur que cet autre maître ne l'assassine. Le mouvement social s'est renversé au XIXe siècle : les serviteurs ne pouvaient surpasser en nombre les maîtres sur l'un ou l'autre bord de la rivière pour qu'ils ne soient pas tentés de dépouiller leurs patrons. La xénophobie a ensuite pris le pas sur le sexisme et la lutte des classes, avec trois missionnaires voyageant en compagnie de trois cannibales affamés. Ce casse-tête vous en apprend autant sur l'évolution des stéréotypes sociaux que sur les mathématiques.

Le casse-tête de traversée de rivière qui suit a fait son apparition dans les années 1980. Microsoft le proposait au tournant du siècle lors de ses entretiens d'embauche, accompagné d'autres problèmes particulièrement retors destinés à tester les aptitudes de ses futurs employés en matière de résolution de problèmes. Un conseil pour résoudre *Le pont suspendu* : ne laissez pas votre instinct l'emporter sur votre esprit logique.

3

Le pont suspendu (ou Quatre garçons dans le vent)

John, Paul, George et Ringo se trouvent au bord d'une gorge enjambée par un pont suspendu, si délabré que seul deux

personnes peuvent le franchir en même temps. La nuit est tombée et la traversée s'effectue à la lumière d'une lampe torche. Or le groupe ne dispose que d'une seule lampe et la distance entre les deux rives est trop grande pour qu'on se la lance d'un bord à l'autre. On doit donc se la passer comme dans un relais. Les quatre garçons ont déjà de longues heures de marche derrière eux et sont épuisés. Le plus en forme, John, peut franchir le pont en 1 min, Paul en 2, George en 5 et Ringo en 10. Évidemment, si deux personnes traversent ensemble, elles progressent à la vitesse du plus lent.

Comment le quatuor doit-il procéder pour traverser au plus vite ?

Une solution qui vient immédiatement à l'esprit consiste à ce que John, le plus rapide, accompagne un à un ses trois amis. Le groupe traverse alors en 2 + 1 + 5 + 1 + 10 = 19 min. Mais est-il possible de faire mieux ? À vous de jouer.

Pour en revenir à Alcuin, voici une autre question tirée de ses *Propositiones* :

> *Combien d'empreintes un bœuf qui a labouré toute la journée laisse-t-il dans son dernier sillon ?*

Aucune bien sûr, puisque la charrue les a toutes effacées ! C'est la plus vieille question piège de toute la littérature des casse-tête.

Parmi les autres types de problèmes qui firent leur apparition dans les *Propositiones*, citons encore les énigmes dites de parenté, où il s'agit de préciser les relations qui unissent les membres d'une famille souvent atypique. Cela fera l'objet de mon dernier emprunt au savant du VIIIe siècle, avant que nous n'exécutions un bond de mille ans en avant dans le temps.

4

Le double mariage

Deux hommes épousent la mère l'un de l'autre. Quel sera le lien de parenté entre leurs fils ?

J'adore les énigmes de parenté. En dépit de toutes mes tentatives pour conserver une froide logique quand je cherche à les résoudre, je ne peux pas m'empêcher de spéculer sur ces étranges arrière-plans familiaux.

Ce type de casse-tête a fait florès depuis l'époque médiévale pour atteindre un pic de popularité chez les Victoriens, peut-être en raison de leur caractère subversif vis-à-vis des structures familiales classiques.

Lewis Carroll les appréciait beaucoup. L'auteur fantasque d'*Alice au pays des merveilles* était aussi mathématicien. Le problème qui suit est emprunté à un chapitre – ou « nœud », pour reprendre sa terminologie – de son *Histoire embrouillée* parue en 1885. Je le considère comme un sommet du genre.

5

Le dîner intime

Le gouverneur de… – enfin tu me suis –… souhaite donner un dîner très intime et compte inviter le beau-frère de son père, le beau-père de son frère, le frère de son beau-père et le père de son beau-frère : à nous de deviner le nombre total d'invités.

Combien seront-ils si le dîner est aussi restreint que possible ?

Avec *Alice au pays des merveilles* et *De l'autre côté du miroir*, Lewis Carroll est probablement l'auteur qui a su le mieux

transmettre le plaisir qu'il y a à manipuler la logique. Les deux romans regorgent de paradoxes, de jeux et d'énigmes philosophiques. Lewis Carroll, nom de plume de Charles Lutwidge Dodgson, professeur de maths à Oxford, écrivit aussi trois livres de problèmes rédigés à la façon de casse-tête. Aucun d'entre eux ne connut cependant une fortune comparable à celle d'*Alice*, en partie parce qu'ils reposaient sur des maths trop difficiles.

Lewis Carroll reste toutefois l'un des tout premiers concepteurs de casse-tête fondés sur les menteurs, un type d'énigme logique qui rencontra par la suite un important succès. Il avait remarqué que si différentes personnes s'accusaient mutuellement de mensonges, il était possible de déduire qui disait la vérité. « Ces derniers jours, j'ai mis au point des problèmes amusants dans la série des "dilemmes des menteurs" », écrivait-il dans son journal en 1894, en mentionnant le casse-tête qui suit, reformulé ici avec des personnages différents. Il fut publié de manière anonyme un peu plus tard cette année-là.

6

Menteurs, menteurs

Berta dit que Greta ment.
Greta dit que Rosa ment.
Rosa dit que Berta et Greta mentent.
Qui dit la vérité ?

Nous reviendrons sur les adeptes de la vérité et du mensonge dans un instant.

Saurez-vous auparavant résoudre le casse-tête logique qui devint viral dans les années 1930 ?

7

Smith, Jones et Robinson

Dans un train, Smith, Jones et Robinson occupent les postes de mécanicien, chauffeur et contrôleur, mais pas nécessairement dans cet ordre (sur les vieilles locomotives, le mécanicien conduit et le chauffeur s'occupe de la vapeur). Ce train transporte trois passagers qui, par hasard, portent le même nom : Mr Jones, Mr Smith et Mr Robinson.

Mr Robinson habite Leeds.

Le contrôleur habite à mi-chemin entre Leeds et Sheffield.

Mr Jones gagne 1 000 livres, 2 schillings et 1 penny par an.

Smith bat le chauffeur au billard.

Le passager qui habite le plus près du contrôleur gagne exactement trois fois plus que lui.

L'homonyme du contrôleur habite Sheffield.

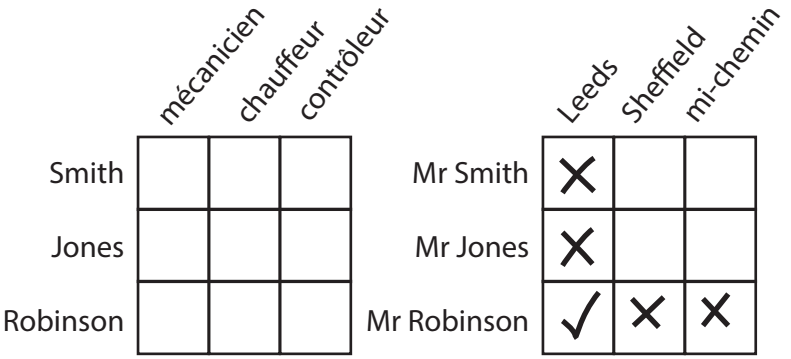
Comment se nomme le chauffeur ?

(J'ai conservé la formulation originale du casse-tête, qui fait appel à l'ancienne subdivision monétaire britannique. La somme de 1 000 livres 2 schillings et 1 penny jouit d'une propriété importante : quand on la divise par trois, on ne tombe pas sur un montant exact.)

J'adore ce casse-tête car il invite à se glisser dans la peau d'un détective. En première lecture, l'information fournie paraît insuffisante pour trouver la solution. Petit à petit, pourtant, indice après indice, les identités correctes se dévoilent.

Peu après sa parution en avril 1930 dans *The Strand Magazine*, un journal littéraire londonien, ce problème connut un succès phénoménal. Il fut d'abord réédité dans des journaux britanniques avant de se répandre dans le monde entier. Un article du *New York Times* de 1932 se penchant sur cette popularité présente le casse-tête sous une forme américanisée où Detroit et Chicago se substituent à Leeds et Sheffield.

La façon la plus directe de résoudre l'énigme consiste à dessiner deux tableaux. Je vous montre la voie. Comme nous cherchons à savoir qui de Smith, Jones et Robinson est le mécanicien, le chauffeur et le contrôleur, considérons d'abord un tableau, présenté ci-dessous à gauche, contenant les noms des employés et leur fonction. Comme il nous faut également associer les trois passagers à leur lieu de résidence, dessinons un second tableau portant Mr Jones, Mr Smith et Mr Robinson en ligne et en colonne Leeds, Sheffield et la station à mi-chemin.



Notre premier élément d'information tangible étant que Mr Robinson habite Leeds, nous cochons la case Mr Robinson/Leeds et barrons les cases correspondant à Mr Robinson qui habiterait ailleurs ou un autre passager qui habiterait Leeds. Les autres indices permettent de remplir d'autres cases. Prenons par exemple le passager qui habite le plus près du contrôleur et qui gagne exactement trois fois plus que lui : il ne peut s'agir de Mr Jones, puisque son salaire n'est pas divisible par trois. À vous maintenant d'achever l'enquête !

Henry Ernest Dudeney, le créateur de ce problème, est mort le mois de la parution. Il avait alors 73 ans et proposait des énigmes pour le *Strand* depuis plus de vingt ans.

C'était le concepteur de casse-tête mathématiques le plus brillant de son temps, mais hélas il n'eut pas la chance d'être témoin de l'éclatante réussite de ce qu'on peut qualifier comme son plus grand succès. Quand l'énoncé de « Smith, Jones et Robinson » fut réédité dans le *New Stateman*, « le résultat fut stupéfiant », selon Hubert Phillips, l'éditeur de la rubrique bridge et mots croisés du magazine : « Nous reçûmes un flot de solutions (que personne n'avait demandées) qui révéla l'existence d'un large public intéressé par les casse-tête logiques. »

La quarantaine, Phillips était un ancien professeur d'économie, conseiller du Parti libéral, qui venait de se réorienter vers le journalisme quand parut le casse-tête. Le succès sans précédent de sa devinette l'incita à pérenniser les énigmes logiques, qui se substituèrent bientôt à sa rubrique de bridge. Au fil des années 1930, Phillips devint un auteur innovant et prolifique de casse-tête (entre autres) mathématiques, et il fit de cette décennie l'âge d'or du genre.

J'apprécie particulièrement les deux problèmes qui suivent. Le premier appartient à la catégorie *Qui est le coupable ?* (ou, selon l'expression anglaise consacrée, à la catégorie *Whodunnit*, si chère à Agatha Christie qui raffolait de ce genre de littérature où il faut trouver le criminel parmi une liste de suspects). En fait, *Qui est LA coupable ?* conviendrait mieux ici. Le second problème se pose en clin d'œil aux énigmes de parenté.

8

L'école des craques

Si St Dunderhead s'enorgueillit des excellents résultats de son équipe de hockey féminin, on ne peut pas dire que « Franchise et honnêteté » soit la devise inscrite au fronton de cette

école de Fogwell. Lorsqu'elles ont récemment gagné un match contre leurs adversaires de Diddleham, les filles de l'équipe ont obtenu la permission d'aller à un concert. Vers vingt-deux heures, dans l'épais brouillard qui régnait sur la ville, Miss Pry, l'enseignante chargée de ramener le groupe, distingua dix silhouettes devant la salle de concert. Elle fut contrariée en apercevant la onzième sortir du cinéma voisin… Quand elle chercha à connaître l'identité de la fraudeuse, les filles se perdirent dans des déclarations contradictoires :

Joan JUGGINS : « C'était Joan Twigg. »
Gertie GASS : « C'était moi. »
Bessie BLUNT : « Gertie Gass est une menteuse. »
Sally SHARP : « Gertie Gass est une menteuse, tout comme Joan Juggins. »
Mary SMITH : « C'était Bessie Blunt. »
Dorothy SMITH : « Ce n'était ni Bessie ni moi. »
Kitty SMITH : « Ce n'était aucune des Smith. »
Joan TWIGG : « C'était soit Bessie Blunt soit Sally Sharp. »
Joan FORSYTE : « Les deux autres Joan sont des menteuses. »
Laura LAMB : « Seule l'une des Smith dit la vérité. »
Flora FLUMMERY : « Non, deux des Smith disent la vérité. »

Sachant que sur ces onze affirmations au moins sept sont fausses, qui a grugé en allant au cinéma ?

9

Une affaire de parenté

La petite vallée de Kinsley a sans doute connu par le passé une pénurie de jeunes femmes, car les cinq hommes qui y vivent se sont mariés chacun avec une veuve, mère d'un des autres. Tomkins, le beau-fils de Jenkins, est le beau-père de Perkins. La mère de Jenkins est une amie de Mme Watkins, dont la mère du mari est cousine de Mme Perkins.
Comment s'appelle le beau-fils de Simkins ?

Les problèmes logiques de ce type sont aujourd'hui souvent qualifiés de « casse-tête à tableaux », car la meilleure

manière de les résoudre consiste à dresser le tableau de toutes les options possibles.

Le plus célèbre du genre a été publié dans le magazine *Life International* en 1962. Son auteur est inconnu. Souvent dénommé « Casse-tête du zèbre », il est aussi parfois appelé « Énigme d'Einstein » à cause d'une théorie avançant que le savant en serait l'inventeur – même si c'est très peu probable, Einstein étant mort en 1955… Une autre information souvent rapportée voudrait que 2 % de la population seulement soit capable de le résoudre. C'est sans doute faux, mais cela a titillé votre ego, non ?

10

Le casse-tête du zèbre

1. Il y a cinq maisons.
2. L'Écossais habite la maison rouge.
3. Le Grec a un chien.
4. Celui qui habite dans la maison verte boit du café.
5. Le Bolivien boit du thé
6. La maison verte est à la droite directe de la maison blanche.
7. Celui qui porte des bottes élève des escargots.
8. Celui qui porte des souliers habite la maison jaune.
9. Celui qui habite la maison du centre boit du lait.
10. Le Danois habite la première maison.
11. Celui qui porte des sandales habite la maison voisine de celui qui a un renard.
12. Celui qui porte des souliers habite dans la maison voisine de celle où il y a un cheval.
13. Celui qui porte des pantoufles boit du jus d'orange.
14. Le Japonais porte des tongs.
15. Le Danois habite à côté de la maison bleue.
Qui boit de l'eau ? Qui a un zèbre ?

Par souci de précision, j'ajoute que chaque maison est peinte d'une couleur différente, que leurs habitants respectifs sont de nationalité différente, vivent avec un type d'animal différent, boivent une boisson différente et portent un type de chaussures différent. Dans la version de *Life*, les voisins fumaient différentes marques de cigarettes américaines. En clin d'œil à Einstein, célèbre pour ne jamais porter de chaussettes, j'ai remplacé cette catégorie par des chaussures.

Les lecteurs de *Life* répondirent en masse. « Le magazine fut à peine mis en vente que les lettres commencèrent à inonder le bureau dédié au courrier », écrivit l'éditeur dans un numéro suivant qui arborait le casse-tête en couverture. « Elles étaient envoyées par des juristes, des diplomates, des médecins, des ingénieurs, des enseignants, des physiciens, des mathématiciens, des militaires, des prêtres ou des femmes au foyer – et par des enfants particulièrement éveillés, ce qui était encore plus dingue. Ces gens qui vivaient à des milliers de miles les uns des autres – dans de petits villages d'Angleterre, aux îles Féroé, dans le désert de Libye, en Nouvelle-Zélande – montraient tous des facultés d'intelligence hors norme. » Lecteur, sois à la hauteur de ce public éclairé, ne me déçois pas !

Si le casse-tête précédent vous a plu, vous devriez adorer le prochain. Élaboré par Max Newman, un jeune logicien de Cambridge, il parut en 1933 dans la rubrique du *New Statesman* de Phillips. Sous le pseudonyme de Caliban – le nom porté par le demi-diable esclave dans *La Tempête* de Shakespeare –, ce dernier publiait des énigmes particulièrement retorses, proprement infernales à résoudre, conçues en collaboration avec des mathématiciens professionnels.

Ce casse-tête est une œuvre de pur génie. L'information fournie dans l'énoncé semble ridiculement mince, même si

elle suffit évidemment à trouver la solution. Selon la *Mathematical Gazette*, ce « joyau » qu'est l'énigme de Newman « doit être résolu pour être cru ». Moi qui ai aussi rudement bataillé avec elle, je reste émerveillé par son économie de moyens et l'élégance brutale de sa solution.

11

Le testament de Caliban

Quand on ouvrit le testament de Caliban, on y lut les clauses suivantes :

« Je lègue à Low, Y.Y. et "Critic" dix livres de ma bibliothèque à chacun, qu'ils choisiront à tour de rôle en respectant l'ordre défini comme suit :

1. Une personne qui m'a vu porter une cravate verte ne peut choisir avant Low ;

2. Si Y.Y. n'était pas à Oxford en 1920, le premier à choisir ne m'a jamais prêté de parapluie ;

3. Si Y.Y. ou "Critic" est deuxième à choisir, "Critic" vient avant celui qui est tombé amoureux le premier. »

Par malheur, aucun des légataires ne se souvient d'un seul des faits évoqués par Caliban. Le notaire précise pourtant qu'en supposant le problème proprement construit (c'est-à-dire sans indication superflue), la seule force de la déduction suffit à trouver la solution.

Alors selon quel ordre Low, Y.Y. et « Critic » doivent-ils choisir leurs livres ?

Low, Y.Y. et « Critic » étaient des collègues de Phillips au *New Stateman*, information qui n'apporte en l'espèce qu'une aide très limitée. Il faut partir du principe crucial que toutes les données sont importantes, ce qui exclut quelque solution qui en laisserait une de côté.

Les aptitudes du cerveau de Newman en matière de casse-tête seraient plus tard mises à profit dans un contexte autrement sérieux, non plus pour en élaborer mais pour en

résoudre. Durant la Seconde Guerre mondiale, il dirigea en effet à Bletchley Park une section de décryptage, la Newmanry, dont les travaux aboutirent à la construction de Colossus, le premier calculateur électronique programmable. Newman était un collègue et un ami proche d'Alan Turing, le père de l'informatique théorique. L'article historique de Turing, « On Computable Numbers » (« Sur les nombres calculables ») fut de fait inspiré par des conférences données par Newman à Cambridge. Et quand ce dernier établit le Laboratoire de calcul de la Royal Society à Manchester après la guerre, c'est encore lui qui persuada Turing de l'y rejoindre.

Hubert Phillips est la source la plus ancienne que je connaisse du casse-tête fascinant du duel à trois, ou « truel ». Je l'ai reformulé en hommage à un film qui s'achève sur un affrontement de trois *pistoleros*.

12

Le truel

Le Bon, la Brute et le Truand sont sur le point de s'expliquer au revolver. Chacun d'eux est positionné sur l'un des trois sommets d'un triangle. Les règles veulent que le Truand tire en premier, la Bête en deuxième, le Bon en troisième, puis de nouveau le Truand, et ainsi de suite dans le même ordre jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un debout. Le Truand tire moins bien que les autres et n'atteint sa cible qu'une fois sur trois. Meilleur tireur, la Brute fait mouche deux fois sur trois. Quant au Bon, il ne rate jamais son coup.

En supposant que chacun adopte la stratégie la plus favorable et que nul n'est atteint par une balle qui ne lui est pas destinée, qui le Truand doit-il viser pour optimiser ses chances de survie ?

Voici encore trois casse-tête logiques comme ceux que publiait Hubert Phillips, même s'il ne les a pas lui-même

conçus. Ils se lisent comme une pièce en un acte, et ils demandent juste ce qu'il faut d'ingéniosité pour que leur résolution procure un sublime sentiment de satisfaction.

13

Pommes et oranges

Vous faites face à trois boîtes portant respectivement les étiquettes « pommes », « oranges » et « pommes et oranges ». L'une des boîtes contient des pommes, l'autre des oranges, la dernière des pommes et des oranges, mais chaque étiquette est sur une mauvaise boîte. Votre mission consiste à remettre les étiquettes en bonne place. Vous ne pouvez voir (ni sentir) le contenu des boîtes, mais vous pouvez plonger votre main dans l'une d'entre elles et sortir un unique fruit.

Quelle boîte choisissez-vous, et une fois que vous voyez le fruit, comment déduisez-vous le contenu correct de chaque boîte ?

14

Sel, poivre et vinaigrette

Steph Sel, Phil Poivre et Vic Vinaigrette déjeunent ensemble quand le seul homme du trio remarque soudain que chaque convive tient en main un condiment différent : qui du sel, qui du poivre et qui de la vinaigrette.

La personne avec le sel opine en ajoutant : « Et ce qui ne manque pas de piquant, c'est que personne ne tient le condiment qui correspond à son nom ! »

« Passe-moi la vinaigrette », lance alors Vic.

Si l'homme ne tient pas la vinaigrette, avec quoi Phil assaisonne-t-il son plat ?

15

Pierre, papier, ciseaux

Adam et Ève ont joué une partie de Pierre, papier, ciseaux en dix manches. Il s'est trouvé que :
Adam a choisi trois fois la pierre, six fois les ciseaux et une fois le papier ;
Ève a choisi deux fois la pierre, quatre fois les ciseaux et quatre fois le papier ;
Il n'y a jamais eu de manche nulle ;
L'ordre des choix est inconnu.
Qui a gagné et par quel score ?

À la mort de Hubert Phillips en 1964, l'auteur de sa nécrologie dans le *Times* salua à sa manière le génie du casse-tête : « On peut dire de lui qu'il égaya les jours de pluie plus qu'aucun autre écrivain de son temps. »

Non content de publier des casse-tête, Phillips proposa des milliers de mots croisés et écrivit à foison sur le bridge – un jeu dont il fut capitaine pour l'équipe d'Angleterre. Il rédigea aussi de la poésie humoristique, plus de deux cents nouvelles policières, ainsi qu'un traité académique sur l'art de pronostiquer le résultat correct des matchs de football – c'était aussi l'un des fins esprits les plus appréciés de l'émission de radio *Round Britain Quiz*. Même si une telle diversité de champs d'action donne l'impression qu'il s'est dispersé, sa contribution à la culture des casse-tête demeure aussi profonde que riche.

Phillips fut aussi le premier à concevoir une énigme reposant sur le partage d'information entre les protagonistes. Cela fait de lui, comme nous le verrons, le grand-père du problème de l'Anniversaire de Cheryl qui fit le tour du monde en 2015.

Les plus anciens de ces casse-tête imaginent des scénarios impliquant des personnes au visage sale. Dans leur version la plus simple, la scène se joue entre deux personnes.

16

Bains de boue

Après s'être joyeusement ébattues dans la gadoue du jardin, Alberta et Bernadette rentrent à la maison. Chacune peut voir le visage de sa sœur mais pas le sien. Leur père, qui peut voir le visage de ses deux filles, annonce qu'au moins l'une d'entre elles a une tache de boue sur le visage. Après leur avoir demandé de se tenir dos au mur, il ordonne : « Que celle qui a le visage boueux avance d'un pas ! »

Rien ne se passe.

Il répète : « Que celle qui a le visage boueux avance d'un pas ! »

Que se passe-t-il alors et pourquoi ?

La résolution de ce genre de casse-tête suppose que tous les protagonistes, y compris les enfants dissipés, se comportent de façon honnête et possèdent les capacités d'analyse d'un logicien professionnel.

Je vous guide pour celui-ci. Nous savons qu'au moins une des enfants a le visage boueux, ce qui ouvre la porte à trois scénarios : ou Alberta a le visage boueux mais pas Bernadette, ou *vice versa*, ou les deux fillettes ont le visage boueux.

Premier cas. Le visage d'Alberta est taché, celui de Bernadette est propre. (Remarquons que cette information est connue de nous, observateur extérieur, mais non des sœurs. Tout leur savoir vient de ce qu'elles voient et de leurs déductions.)

Glissons-nous dans la peau d'Alberta. Elle voit le visage propre de Bernadette. Comme elle sait que l'une d'entre elles au moins a le visage taché, elle en déduit qu'il s'agit du sien. Or quand son père demande à ce que la personne au visage boueux s'avance d'un pas, elle reste immobile. Nous en

déduisons que ce scénario est impossible, sinon Alberta aurait avancé (nous partons du principe qu'elle est honnête).

Deuxième cas. Bernadette a le visage taché, celui d'Alberta est propre.

La même argumentation s'applique en permutant les prénoms, ce qui élimine aussi ce scénario.

Troisième cas. Les deux filles ont le visage taché.

Glissons-nous encore dans la peau d'Alberta. Elle voit que Bernadette a le visage boueux. Elle sait que l'une d'entre elles au moins a le visage boueux. Elle ne peut rien en déduire sur la propreté de son visage à elle, puisque dans les deux cas – qu'il soit taché ou non – l'affirmation selon laquelle l'une des deux sœurs a le visage sale est juste. Donc quand leur père demande à la personne au visage boueux d'avancer, elle reste immobile. Il est ici important de comprendre que si Alberta ne s'avance pas, c'est parce qu'elle ne connaît pas l'état de son visage – et non parce qu'elle pense qu'il est propre.

De la même façon, Bernadette voit le visage taché d'Alberta et en déduit qu'elle ne peut pas connaître avec certitude l'état du sien. Aussi, quand le père demande à celle qui a le visage taché d'avancer, reste-t-elle immobile.

Nous sommes sûrs que ce scénario est le bon, car les deux enfants ne bougent pas quand leur père lance son ordre pour la première fois. Que se passe-t-il ensuite ?

Soit le visage d'Alberta est taché, soit non. Mais elle peut désormais éliminer la possibilité que son visage soit propre, car autrement sa sœur, ayant vu ce visage propre, aurait déduit que le sien était taché et aurait avancé d'un pas. Alberta conclut donc qu'elle a le visage taché. Exactement pour les mêmes raisons, Bernadette déduit de son côté qu'elle a aussi le visage taché. Quand leur père lance son ordre pour la seconde fois, elles font donc toutes deux un pas en avant.

Pour résumer, voici ce qui se passe : les deux sœurs, voyant chacune le visage taché de l'autre, ne peuvent rien déduire sur l'état du leur. Quand elles comprennent qu'elles sont toutes deux dans le même cas, cette information nouvelle leur permet de déduire qu'elles ont toutes deux le visage taché. Et voilà !

Si Hubert Phillips publia ce premier casse-tête de visages sales en 1932, sa logique sous-jacente est autrement plus ancienne. Un jeu français dénommé « je-te-pince-sans-rire », datant au moins du XVIe siècle, demandait à ce qu'une personne aux doigts couverts de suie tache le visage de certains membres de l'assistance. Le dernier à rire l'emportait. Ce jeu est mentionné dans les aventures de Gargantua et Pantagruel, le chef-d'œuvre de François Rabelais. Une des traductions allemandes du livre du début du XIXe siècle évoque une variante du jeu, où chacun pince son voisin de droite au menton. Deux des joueurs ayant sciemment les doigts noircis de craie carbonisée, deux personnes se retrouvent avec le visage taché. « Ces joueurs sont d'autant plus ridicules, note le traducteur, que tous deux pensent que l'assistance rit à cause de l'autre. »

Peu après la publication par Phillips du premier casse-tête sur les visages, des variantes fleurirent dans les livres d'énigmes. Le genre attira même l'attention d'universitaires, dont le cosmologue russo-américain George Gamow, l'un des premiers partisans de la théorie du big-bang de l'origine de l'Univers, qui écrivait aussi de merveilleux ouvrages de vulgarisation scientifique. L'un d'entre eux, *Un, deux, trois… l'infini*, originellement publié en 1947, reste l'un de mes favoris. Il possède un charme spécial du fait que l'auteur l'a illustré lui-même. En 1956, Gamow conseillait la compagnie aérienne Convair, qui employait par ailleurs à plein temps le mathématicien Marvin Stern. Les deux hommes, qui travaillaient à des étages différents, remarquèrent qu'à chaque fois que l'un se rendait dans

le bureau de l'autre, l'ascenseur allait presque toujours dans la mauvaise direction. Ils devinrent amis en devisant sur les mathématiques sous-jacentes à ce mystère apparent, et finirent par rédiger ensemble le livre *Jeux mathématiques*, qui propose le fascinant problème de visages à trois personnes ci-dessous.

17

Trois visages tachés de suie

Trois passagers sont assis tranquillement dans un train quand soudain une locomotive arrive en sens opposé et souffle de la fumée à travers la fenêtre ouverte, couvrant leur visage de suie. Voyant cela, l'un des trois passagers, une jeune femme répondant au nom de Miss Atkinson, relève le nez de son livre en gloussant. Mais elle remarque immédiatement que les deux autres passagers gloussent pareillement. Miss Atkinson, tout comme ses compagnons de voyage, suppose que son visage est propre et que ses deux homologues rient à la vue du visage noirci de l'autre. Puis elle comprend, sort un mouchoir et se nettoie le visage.

Disons que les trois passagers se comportent logiquement mais que Miss Atkinson est plus vive d'esprit. Comment a-t-elle compris que son visage était aussi taché de suie ?

Même si *Jeux mathématiques* n'a pas laissé la même trace que les autres ouvrages signés par Gamow, il renferme l'un des plus brillants casse-tête logiques jamais conçus. Gamow l'attribue au grand astrophysicien soviétique Viktor Ambartsumian. Je l'ai reformulé et l'ai modifié (j'ai échangé les rôles tenus par les hommes et les femmes) pour atténuer son caractère trop sexiste à mon goût. Niveau difficulté, c'est du haut vol, mais vous devriez parvenir à le résoudre si vous avez assimilé la logique des deux précédents problèmes. Et quand bien même vous coinceriez, vous n'aurez aucune peine à comprendre la solution – et à vous en émerveiller.

18

Quarante maris infidèles

Dans une ville de province d'un royaume, quarante maris trompent leur épouse. Chaque épouse a conscience de la situation des autres femmes mais pas de la sienne. En d'autres termes, chaque épouse croit son mari fidèle tout en sachant que les trente-neuf autres ne le sont pas. La nouvelle de cette triste dégénérescence morale ayant gagné la capitale, le monarque décide de punir les vilains maris en promulguant le décret suivant : « Une épouse qui découvre l'infidélité de son mari devra l'exécuter le lendemain à midi sur la place de la ville. »

Et il ajoute : « Je sais qu'au moins un mari est infidèle et vous presse d'agir à ce sujet. »

Que se passe-t-il ensuite ?

L'énigme semble d'abord impossible à résoudre dans la mesure où les femmes savent *déjà* que trente-neuf maris

sont infidèles. Quelle différence cela peut-il bien faire que le monarque dise savoir « qu'au moins un mari est infidèle » ? Eh bien cela fait une grande différence !

Dans une veine similaire, l'énigme suivante met en scène trois personnes qui fondent là aussi leurs déductions sur le savoir partagé entre tous les protagonistes.

19

Carton à chapeaux

Algernon, Balthazar et Caractacus font face à un carton contenant trois chapeaux rouges et deux chapeaux verts. Ils ferment tous les yeux, tirent du carton chacun un chapeau qu'ils mettent sur leur tête, referment le carton et rouvrent les yeux. Chacun voit le chapeau porté par les deux autres mais pas le sien. Aucun ne connaît non plus la couleur des chapeaux restés dans le carton.

ALGERNON dit : « Je ne connais pas la couleur de mon chapeau. »

BALTHAZAR dit : « Je ne connais pas la couleur de mon chapeau. »

CARACTACUS, voyant que les deux autres portent des chapeaux rouges, dit : « Je connais la couleur de mon chapeau. »

De quelle couleur est donc le chapeau de Caractacus ?

Le casse-tête du carton à chapeaux remonte au moins aux années 1940. Il se formulait alors avec des mandarins chinois portant un disque au front qui, détail important, ne déclaraient pas leur ignorance à voix haute : il fallait la déduire de leur silence.

Le dialogue apparut dans les années 1960. Aussi artificiel qu'il puisse paraître, il constitue un vrai progrès en clarifiant le savoir des protagonistes tout en conférant plus d'intelligibilité à la saynète.

L'énigme suivante parut en 1953 dans *A Mathematician's Miscellany* (« Les mélanges d'un mathématicien ») de J.E. Littlewood, l'un des trois plus grands mathématiciens britanniques de la première moitié du XXe siècle avec G.H. Hardy et « Hardy-Littlewood », selon la bonne blague qui se référait à la longue et fructueuse collaboration qu'ont entretenue les deux hommes. Durant la Première Guerre mondiale, Littlewood œuvra pour l'armée à l'amélioration de la formule donnant la direction, la durée et la portée de la trajectoire des missiles. La valeur de son travail se juge aux divers privilèges qu'il obtint alors, comme la très précieuse permission de pouvoir porter un parapluie même revêtu de son uniforme.

Pour en revenir au casse-tête, il a été ici légèrement modernisé par l'ajout d'un dialogue comique, une composante aujourd'hui de rigueur dans les casse-tête. Il appartient à un type de problèmes qui posent un redoutable défi à notre capacité d'attention, car ils obligent à garder en tête différents scénarios possibles. On arrive alors au bout du raisonnement en éliminant une série d'impasses qui, peu à peu, dessinent en creux la bonne réponse. Les casse-tête logiques vous contraignent à clarifier votre pensée. Cela exige des efforts de votre part, mais procure indubitablement un plaisir masochiste pas si désagréable…

20

Nombres consécutifs

Zébédée écrit secrètement deux nombres sur un morceau de papier. Il indique à Xanthe et Yvette que ces nombres sont des entiers comme 1, 2, 3, 4, 5, etc. Il leur précise aussi que les deux nombres sont consécutifs, c'est-à-dire comme 1 et 2, ou 2 et 3, ou 3 et 4, etc. Zébédée dit alors tout bas l'un des nombres à Xanthe et l'autre à Yvette.

S'ensuit ce dialogue :
XANTHE : « Je ne connais pas ton nombre. »
YVETTE : « Je ne connais pas ton nombre. »
XANTHE : « Je connais maintenant ton nombre. »
YVETTE : « Je connais maintenant ton nombre. »
Saurez-vous trouver au moins un des nombres choisis par Zébédée ?

Plutôt que de murmurer le nombre à l'oreille de Xanthe, Zébédée aurait pu l'avoir tracé sur le front ou le chapeau d'Yvette. Tout comme il aurait pu écrire l'autre sur le visage ou le chapeau de Xanthe. Dans ce type de casse-tête, il importe surtout que Xanthe connaisse quelque chose qu'ignore Yvette et *vice versa*.

La même structure sous-tend le fameux problème qui a hanté mes nuits, habitant mes cauchemars comme mes rêves : celui de l'anniversaire de Cheryl. J'ai posté le problème en 2015 sur mon blog du *Guardian*, après l'avoir repéré sur un site Internet singapourien. Il a attiré mon attention parce qu'il prétendait s'adresser à des élèves de primaire. Il allait dans le sens du stéréotype voulant que les écoles d'Asie soient remplies de brillants élèves en mathématiques. Avec des problèmes d'un tel niveau, il n'y avait pas lieu de s'étonner que les écoliers singapouriens soient les meilleurs jeunes mathématiciens du monde.

21

L'Anniversaire de Cheryl

Albert et Bernard, venant de se lier d'amitié avec Cheryl, lui demandent la date de son anniversaire. Cheryl leur donne d'abord une liste de dix dates possibles :

15 mai	**16 mai**	**19 mai**
17 juin	**18 juin**	
14 juillet	**16 juillet**	
14 août	**15 août**	**17 août**

Cheryl indique ensuite le mois à Albert et le jour à Bernard. S'ensuit le dialogue suivant :

ALBERT : « Je ne connais pas la date de l'anniversaire de Cheryl, mais je sais que Bernard ne la connaît pas non plus. »

BERNARD : « Je ne connaissais pas la date de l'anniversaire de Cheryl mais maintenant je le connais. »

ALBERT : « Alors je connais aussi la date de l'anniversaire de Cheryl. »

À quelle date se fête l'anniversaire de Cheryl ?

Quelques heures après sa publication, le billet apparut à la tête des articles les plus vus du site du *Guardian*. Ce succès tenait sans doute pour partie au choix un peu attrape-clic de mon titre : « Êtes-vous plus intelligent qu'un enfant de 10 ans ? » Peu de temps après, il se révéla toutefois que l'énoncé avait été repris d'une compétition régionale de mathématiques visant les meilleurs 40 % des adolescents de 15 ans, et qu'il s'agissait en outre de l'avant-dernier problème, sur une liste de vingt-cinq à la difficulté croissante. On s'attendait donc à ce que seuls des participants particulièrement brillants en viennent à bout.

Je changeai donc mon titre de manière à mieux refléter le niveau réel du problème, ce qui ne fit pas retomber l'enthousiasme pour autant. Bien au contraire : le problème de l'Anniversaire de Cheryl se répandit sur la Toile à la manière d'une pandémie. Dans les jours qui suivirent, ce casse-tête se classa article numéro un sur de nombreux sites web, dont celui de la BBC et du *New York Times*. Rien que sur celui du *Guardian*, il comptabilisa plus de cinq millions de clics cette semaine-là. Et quand le journal établit le classement annuel des articles les plus vus, mon billet atteignit

la neuvième place et celui dans lequel je présentai la solution la sixième. Je doute qu'un problème de maths ait jamais touché un public aussi vaste en si peu de temps.

Je suis également entré en contact avec Joseph Yeo Boon Wooi, l'enseignant en mathématiques singapourien qui avait rédigé l'énoncé. Tombé sur le problème devenu viral en surfant sur Facebook, il s'était exclamé en découvrant une photo du sujet d'examen : « Attends, ça me rappelle quelque chose… Hey, mais c'est moi qui l'ai posé ! »

Le Dr Yeo, de l'Institut national de l'éducation à Singapour, est l'auteur principal des manuels de mathématiques utilisés par plus de la moitié des élèves du secondaire à Singapour. Il m'a précisé que l'idée de l'anniversaire de Cheryl provenait de quelqu'un d'autre. Ayant lu en ligne une version similaire du casse-tête, il avait décidé de l'adapter. Il a changé les noms des protagonistes, resserré les dialogues et malicieusement modifié les dates de façon à ce que la solution corresponde à son propre anniversaire. Lui comme moi avons échoué à retrouver le véritable concepteur de l'énigme. Notre investigation s'est achevée sur le site *Ask Dr Math* (« Demande au Dr Math »), maintenu par l'université de Drexel. Un certain « Eddie » y demandait la solution, c'est tout ce que nous avons pu dégotter…

Une des leçons que j'ai apprises de l'Anniversaire de Cheryl est que l'écriture de casse-tête est généralement une entreprise collective. Comme les histoires drôles ou les fables, les énigmes se transforment et évoluent, gagnant à chaque reformulation un lot de détails nouveaux. Et les meilleurs d'entre elles traversent les décennies, les siècles, voire les millénaires.

Joseph Yeo a fait davantage que servir de relais à l'Anniversaire de Cheryl : il a conçu cette suite.

22

L'Anniversaire de Denise

Albert, Bernard et Cheryl, venant de se lier d'amitié avec Denise, lui demandent la date de son anniversaire. Denise leur donne d'abord une liste de 20 dates possibles :

17 février 2001	16 mars 2002	13 janvier 2003	19 janvier 2004
13 mars 2001	15 avril 2002	16 février 2003	18 février 2004
13 avril 2001	14 mai 2002	14 mars 2003	19 mai 2004
15 mai 2001	12 juin 2002	11 avril 2003	14 juillet 2004
17 juin 2001	16 août 2002	16 juillet 2003	18 août 2004

Denise indique alors le mois à Albert, le jour à Bernard et l'année à Cheryl.

S'ensuit le dialogue suivant :

ALBERT : « Je ne connais pas la date de l'anniversaire de Denise, mais je sais que Bernard ne la connaît pas non plus. »

BERNARD : « Je ne connais toujours pas la date de l'anniversaire de Denise, mais je sais que Cheryl ne la connaît pas non plus. »

CHERYL : « Je ne connais toujours pas la date de l'anniversaire de Denise, mais je sais qu'Albert ne la connaît toujours pas non plus. »

ALBERT : « « Je connais maintenant la date de l'anniversaire de Denise. »

BERNARD : « Je la connais maintenant aussi. »

CHERYL : « Moi aussi. »

À quelle date se fête l'anniversaire de Denise ?

Au nombre des ancêtres importants de l'Anniversaire de Cheryl, on compte « Le Casse-tête impossible » du mathématicien hollandais Hans Freudenthal. Publiée en 1969, l'énigme comprenait pour la première fois un dialogue du type : « Je ne sais pas/Maintenant je sais. » Elle colle parfaitement à son titre : elle est extrêmement difficile à résoudre armé seulement d'un crayon et d'un papier, raison pour

laquelle je ne la propose pas ici. (Les plus courageux la trouveront facilement sur Internet.) Le casse-tête de Freudenthal relève également d'un autre genre traditionnel d'énigmes, remontant au moins à la première moitié du siècle dernier. Il s'agit de déduire un ensemble de nombres de leur somme et de leur produit. Ces problèmes se formulent généralement par des histoires d'âge et mettent souvent en scène des hommes du clergé.

23

Les âges des enfants

Le vicaire demande au bedeau (un laïc qui aide le prêtre à la messe) : « Quel âge ont vos trois enfants ? »

Le bedeau répond : « Additionnez leur âge et vous obtiendrez le numéro de ma maison ; multipliez-les et vous obtiendrez 36. »

Le vicaire réfléchit quelque temps et dit qu'il ne peut résoudre le problème.

Le bedeau dit alors au vicaire : « Votre fils est plus vieux que tous mes enfants », avant d'ajouter que le vicaire est maintenant en état de trouver la solution.

Quel âge ont les enfants du bedeau ?

Et tout cela nous amène à l'avant-dernier casse-tête du chapitre, conçu par le mathématicien britannique John Horton Conway, professeur émérite à l'université de Princeton. La dernière fois que j'ai vu Conway, lors d'une conférence interdisciplinaire de maths, d'énigmes et de magie, il arriva devant trois cents personnes en annonçant que les gens comme lui méritaient un salut personnalisé : il se désigna alors d'un geste de la main tout en gémissant et murmurant le mot *nerd*, un sobriquet péjoratif utilisé pour se moquer des élèves repliés sur eux-mêmes et fanas de sciences, en particulier

d'informatique. Puis il invita toute la salle à effectuer un salut général, comme s'ils appartenaient tous à une seule et même famille, celle des *nerds*. Sa carrière universitaire n'a en rien entamé l'espièglerie naturelle de Conway, qui a conçu de nombreux casse-tête et distractions de toutes sortes, dont son plus célèbre, le Jeu de la vie. Cette simulation mathématique de l'évolution, où une cellule de départ se multiplie sans cesse et peut donner naissance à de véritables écosystèmes, est régulièrement employée par des scientifiques comme Stephen Hawking pour montrer que des règles simples engendrent parfois un comportement complexe.

Le problème ci-dessous est un chef-d'œuvre. Conway réussit à se moquer des casse-tête à savoir partagé tout en proposant un des plus brillants modèles du genre. Et comme les meilleures énigmes logiques depuis le temps d'Alcuin, celle-ci met en scène une histoire amusante qui paraît à première vue délivrer trop peu d'information pour être résolue.

24

Des génies dans un bus

L'autre soir, j'étais assis dans un bus derrière deux hommes qui paraissaient très malins et j'ai surpris la conversation suivante :

A : « J'ai un certain nombre d'enfants dont les âges sont des nombres entiers strictement positifs. Leur somme fait le numéro de ce bus et leur produit mon propre âge. »

B : « Comme c'est intéressant ! Peut-être que si vous me disiez votre âge et le nombre de vos enfants, je pourrais déterminer leur âge ? »

A : « Non. »

B : « Ah ah, je connais maintenant votre âge ! »

Quel numéro porte le bus ?

Quand l'homme A répond non, ce n'est ni par mauvaise humeur ni par dédain. Il dit simplement qu'en donnant son âge et le nombre de ses enfants, B ne disposerait pas assez d'informations pour déduire l'âge de chacun d'eux.

Pour simplifier la solution, j'ajoute que A a plus d'un enfant, mais qu'il n'a pas plus d'un seul enfant âgé de 1 an. Et le bus porte un seul numéro possible.

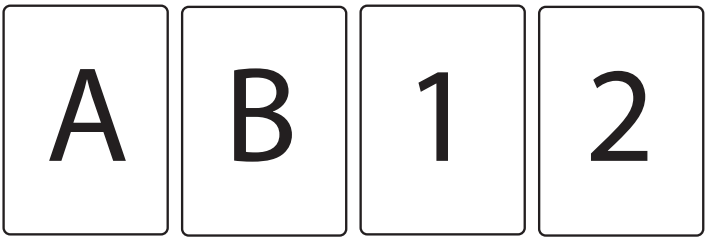
En route, attention à la fermeture des portes !

Et pour finir une énigme visuelle, afin de glisser en douceur vers la géométrie, principal sujet du prochain chapitre. Allez, un indice : la plupart des gens se trompent dans la résolution.

25

Jeu de voyelles

Les quatre cartes suivantes portent toutes une lettre sur une face et un nombre sur l'autre.



Pour tester si cette affirmation est vraie :
« Toute carte avec une voyelle sur une face porte un nombre impair sur l'autre. »
Quelles cartes dois-je retourner ?

PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES

Un homme marche tout autour d'un atome...

En guise d'apéritif

Êtes-vous un génie en jeux de lettres ?

1) Composez un mot français en ajoutant une lettre au début et/ou à la fin de la séquence qui suit. Il est interdit de permuter les caractères donnés.

ANAN

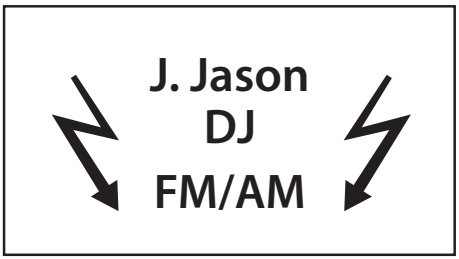
2) Composez un mot de dix lettres avec les seules dix premières touches de la ligne supérieure d'un clavier d'ordinateur :

AZERTYUIOP

3) Composez un mot en ajoutant quatre lettres au début et/ou à la fin de la chaîne qui suit. Il est interdit de permuter les caractères donnés.

TOMI

4) Jasper Jason, qui travaille pour une radio locale, vous présente sa carte de visite.



Voyez-vous sa particularité ?

5) Composez un mot en ajoutant des lettres au début et/ou à la fin de la chaîne qui suit. Il est interdit de permuter les caractères donnés. Cette fois, je ne vous indique pas le nombre de lettres à ajouter.

RAOR

6) Quelle est la lettre qui suit ?
QQSDDDVVVVVVVVV

7) Composez un mot en ajoutant des lettres au début et/ou à la fin de la chaîne qui suit. Il est interdit de permuter les caractères donnés.
CV

8) Qu'ont en commun les mots suivants ?
Basse
Canona
Crever
Dresser
Feue
Ressasse
Selle
Terre

9) Composez un mot en ajoutant des lettres au début et/ou à la fin de la chaîne qui suit. Il est interdit de permuter les caractères donnés.
TANTAN

10) Quelle est la lettre qui suit ?
U A E E E A

Le mathématicien grec Euclide, avec ses *Éléments*, rédigés vers 300 av. J.-C., est l'auteur du premier livre magnifiant les joies de la déduction logique. L'ouvrage a beau traiter avant tout de géométrie, c'est par un autre de ses aspects qu'il a marqué au fer rouge l'histoire de la pensée humaine : j'ai nommé sa méthode pour étudier les propriétés des points, des droites et autres surfaces.

Le livre commence par un ensemble de définitions et cinq règles fondamentales dont Euclide nous demande d'accepter la véracité. Il déduit ensuite tous les autres résultats présentés dans le livre à partir de ces seules prémisses, chaque démonstration s'appuyant sur un enchaînement logique et rigoureux d'étapes. La force de cette méthode ? Elle garantit la solidité de l'ensemble de l'édifice à partir de fondations saines. De fait, ce type de raisonnement servira de modèle à toutes les mathématiques ultérieures.

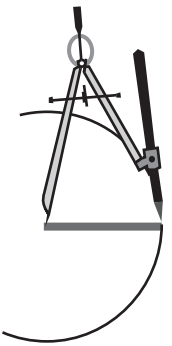
Sur un plan pratique, Euclide se sert en tout et pour tout d'une règle pour tracer des droites et d'un compas pour tracer des cercles. Rien d'autre. Ces deux seuls instruments lui suffisent pour prouver les centaines de théorèmes contenus dans le livre.

À titre d'exemple, voici la manière de déterminer le milieu d'un segment :

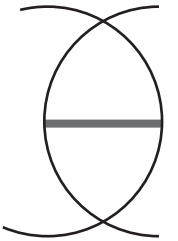
Étape 1. Placer la pointe du compas à l'une des extrémités du segment, le crayon à l'autre, et tracer un cercle.

Étape 2. Répéter l'opération avec la pointe du compas à l'autre extrémité.

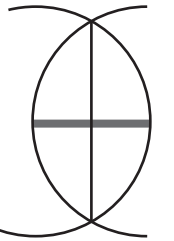
Étape 3. Avec la règle, tracer une ligne joignant les intersections des cercles : elle coupe le segment en deux parties égales.



Étape 1



Étape 2



Étape 3

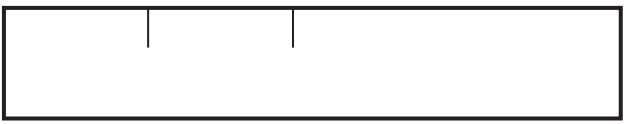
Chaque théorème des *Éléments* se présente de fait comme un casse-tête, avec sa preuve pour solution. Il s'agit d'un recueil d'énigmes qui ne dit pas son nom. L'énoncé qui suit me plaît beaucoup parce qu'il s'inscrit dans l'école de recherche d'économie de moyens d'Euclide ; en autorisant seulement un crayon et une règle pour la construction, il vient même titiller le savant en semblant lui dire : « Alors Euclide, on utilise le compas ? Espèce de dégonflé ! »

26

À la règle seule

Vous disposez d'un crayon et d'une règle, mais pas de compas. La règle porte deux marques, comme illustré ci-dessous. Comment tracer un trait mesurant exactement la moitié de la distance entre les deux marques ? En d'autres termes, si on imagine que la distance entre les marques fait deux unités, comment tracer un segment d'une seule unité ?

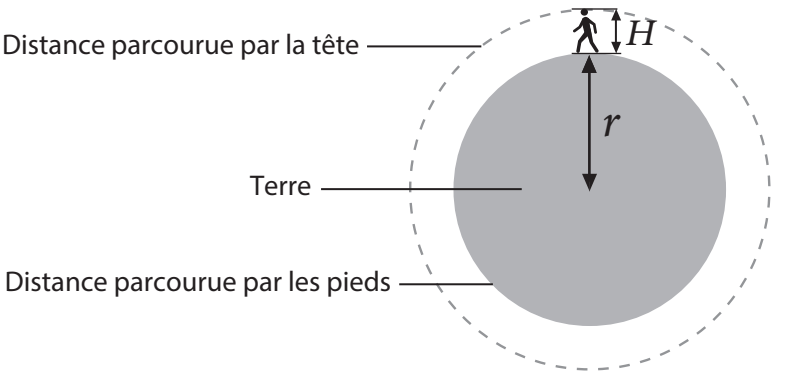
Les mesures s'effectuent à la règle seule, sans le papier ni le crayon.



Les problèmes que j'ai choisis pour ce chapitre sont géométriques en ce sens qu'ils explorent ou jouent avec les propriétés des lignes, des formes et des objets physiques. Celui qui suit provient d'une édition des *Éléments* du XVIIIe siècle, enrichie des commentaires de William Whiston, le successeur d'Isaac Newton à la chaire qu'il occupait à l'université de Cambridge. Whiston pointa une curiosité mathématique qui, avec le temps, se mua en un célèbre casse-tête.

Whiston imaginait un homme faisant le tour de la Terre en marchant, puis s'interrogeait sur la distance supplémentaire que la tête avait parcourue par rapport aux pieds. Sauriez-vous la déterminer ? Notre planète est supposée être une sphère parfaite.

Cette fois, je vais faire les maths. Le calcul demande de savoir que le périmètre d'un cercle vaut deux fois π fois le rayon, c'est-à-dire $2\pi r$ où π fait approximativement 3,14 et r est le rayon. J'espère que l'introduction de cette formule ne vous détournera pas d'un résultat aussi amusant que surprenant. Au pire, serrez les dents pendant que je continue !



Dans le diagramme ci-dessus, r désigne le rayon de la Terre et H la hauteur de l'homme. En vertu de la formule précédente, la circonférence de la Terre, qui correspond à la distance parcourue par les pieds vaut $2\pi r$, tandis que la circonférence du cercle en pointillé, correspondant à la distance parcourue par la tête, vaut $2\pi(r + H)$. La différence entre les deux circonférences, qui correspond à la distance supplémentaire parcourue par la tête, vaut donc :

$2\pi(r + H) - 2\pi r = 2\pi r + 2\pi H - 2\pi r = 2\pi H$ (observez comment les deux termes $2\pi r$ s'annulent, cela nous servira plus tard).

La solution recherchée est ainsi $2\pi H$, soit 2 × 3,14 × la hauteur de l'homme. Pour un homme mesurant disons 1,80 m, sa tête parcourt une distance supplémentaire d'environ 11 m.

Nous comprenons maintenant pourquoi Whiston jugeait ce résultat digne d'être noté. La distance est minuscule ! La Terre mesure environ 40 000 km de circonférence. Songez qu'après avoir marché des milliers de kilomètres autour de la Terre, la tête de l'homme n'a parcouru que 11 m de plus que ses pieds, soit seulement 0,000 03 % du voyage total.

Le globe-trotter de Whiston a donné lieu au casse-tête classique suivant :

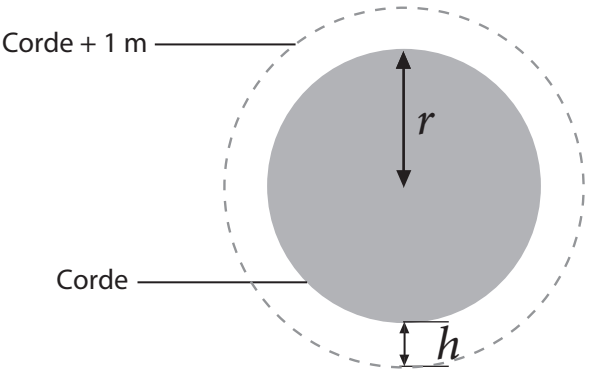
27

La corde autour de la Terre

Une corde tendue enserre la Terre au niveau du sol. Elle est allongée de un mètre puis uniformément élevée en tout point du sol jusqu'à de nouveau former un cercle tendu.

À quelle hauteur se situe la corde ? Quel animal pourrait passer dessous ?

L'illustration ci-dessous montre que le problème se rapporte fondamentalement au précédent. Tous deux demandent la comparaison de cercles concentriques, le plus petit correspondant à la circonférence de la Terre. Dans le cas de la corde, la circonférence du plus grand fait un mètre de plus que la circonférence du plus petit.



Quand le problème est formulé en termes de corde, la nature contre-intuitive de la solution frappe encore plus. En allongeant la corde de un mètre, nous pourrons l'élever à 1/2π, soit environ 16 cm du sol. (Détail du calcul : soit c la circonférence de la Terre, soit une corde allongée mesurant $c + 1$. La formule de la circonférence donne deux équations :

$2\pi r = c$ et $2\pi(r + h) = c + 1$. Elles se combinent pour donner : $2\pi h = 1$, soit $h = 1/2\pi$.)

Arrêtons-nous un instant à ce résultat. Une corde de 40 000 km de long est portée à 40 000,001 km de long. Et cet allongement apparemment insignifiant donne assez de mou pour la tenir à 16 cm du sol tout autour de la Terre. Un chien ou un chat pourrait aisément passer dessous.

Revenons maintenant à l'homme qui marche tout autour de la Terre. Lors du calcul de la distance supplémentaire parcourue par la tête, les deux termes $2\pi r$ s'annulent, ce qui aboutit à une solution de 2π fois la hauteur de l'homme. Le rayon r de la Terre n'apparaît donc plus nulle part dans la solution, ce qui signifie que cette distance supplémentaire parcourue par la tête ne dépend que de la hauteur de l'homme. Pas de la dimension de la Terre ! Le globe-trotter de Whiston pourrait marcher autour de n'importe quelle autre sphère, sa tête couvrirait toujours 11 m de plus.

Sachant cela, je crois que vous pouvez répondre facilement à ces questions :

1. Un homme marche tout autour d'un atome. Quelle distance supplémentaire parcourt la tête par rapport aux pieds ?

2. Un homme marche tout autour d'un ballon de foot. Quelle distance supplémentaire parcourt sa tête par rapport aux pieds ?

3. Un homme marche tout autour de Jupiter (environ 400 000 km de circonférence). Quelle distance supplémentaire parcourt sa tête par rapport aux pieds ?

4. Un homme marche tout autour du Soleil (environ 4,4 millions de kilomètres de circonférence). Quelle distance supplémentaire parcourt sa tête par rapport aux pieds ?

Réponse : 11 m dans tous les cas – en ignorant les problèmes physiques qui entrent en jeu, bien sûr. De la même façon, une corde qui enserre un atome, un ballon de foot, Jupiter ou le

Soleil, si elle est allongée de un mètre, crée un mou suffisant pour l'élever de 16 cm en tout point. Incroyable !

William Whiston n'occupa la chaire de Newton que huit ans, avant d'être congédié de Cambridge pour hérésie – il rejetait l'idée de la Sainte Trinité, qui place Jésus, Dieu et l'Esprit saint sur un pied d'égalité, et pensait que Jésus devait se soumettre à Dieu. Il ne revint jamais à l'université et donna des cours de science dans des cafés londoniens, cours qui tournaient souvent à la diatribe religieuse.

Sa plus grande contribution à la science ? Persuader le gouvernement britannique d'établir le Bureau des longitudes, un organisme entre autres chargé d'offrir une récompense financière à la première personne qui découvrirait le moyen de déterminer la longitude en mer. Visant lui-même à gagner le prix, il échoua dans toutes ses tentatives. Quoi de plus normal, dans ces conditions, que sa plus grande contribution aux mathématiques soit un casse-tête de voyage autour du monde !

À titre personnel, je préfère le problème de Whiston dans sa formulation avec l'homme qui marche tout autour de la Terre. Ce scénario me paraît moins artificiel que celui de la corde sur le sol – même si les situations sont aussi absurdes l'une que l'autre. En admettant que vous ayez encerclé la Terre avec une corde, et que vous l'ayez allongée de un mètre, avant même de penser à faire « léviter » la corde sur toute sa longueur, votre réflexe sera de la soulever en un point. Surtout si votre but est de laisser passer un animal dessous !

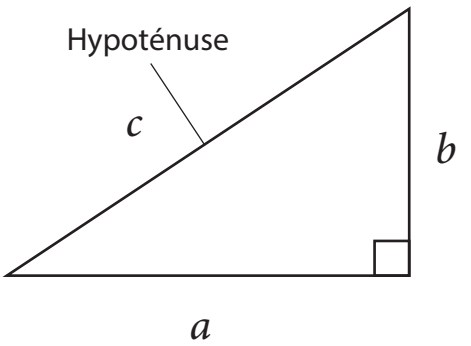
Cette réflexion conduit au problème suivant :

> *Une corde encerclant la Terre est allongée de un mètre. Elle est levée en un point jusqu'à disparition du mou. À quelle hauteur monte-t-elle ? Quel animal pourrait se glisser dessous ?*

Comme la solution demande un certain niveau en mathématiques, je vous suggère de ne pas vous noyer dans des

calculs. Je ne propose ce problème qu'en raison de l'intérêt de sa solution. Essayez de la deviner avant de la découvrir en fin d'ouvrage. Ou mieux : résolvez le problème suivant, *puis* allez voir la réponse.

Indice : Pour résoudre ces deux problèmes, vous aurez besoin du théorème de Pythagore, qui affirme que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse vaut la somme des carrés des autres côtés. (L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.). Mais vous le connaissiez déjà, n'est-ce pas ?



$$a^2 + b^2 = c^2$$

28

La rue enguirlandée

En prévision d'une fête prochaine, vous souhaitez égayer votre rue par une guirlande de fanions. La rue mesure 100 mètres de long ; la guirlande 101 mètres. Vous attachez une extrémité de la guirlande au bas d'un réverbère à un bout de la rue ; l'autre au bas d'un réverbère à l'autre bout de la rue, 100 mètres plus loin. Vous élevez ensuite un poteau à mi-chemin des deux réverbères, au sommet duquel vous accrochez le centre de la guirlande.

En supposant que la guirlande soit tendue (sans mou ni étirement), à quelle hauteur s'élève le poteau ?

Les trois problèmes qui suivent traitent de cercles roulants. S'ils peuvent donner le tournis à ceux qui n'auraient pas l'habitude de manier ce type de concepts, l'effet waouh qu'ils procurent lorsqu'on découvre la solution est à peu près garanti. Nous visiterons ensuite le Japon via des casse-tête plus accessibles.

Les *Éléments* instituèrent Euclide comme le chantre de la logique, le grand prêtre de la froide et rigoureuse pensée déductive. Cette réputation est aujourd'hui partagée, voire éclipsée, par un détective fumant la pipe et coiffé d'une casquette de tweed : Sherlock Holmes *himself* !

Même si Sherlock Holmes fondait ses raisonnements sur une logique implacable, proche de l'esprit d'Euclide (comme en témoigne son célèbre « Combien de fois vous ai-je dit que lorsque vous avez éliminé l'impossible, ce qui reste, si improbable soit-il, est nécessairement la vérité ? »), curieusement il n'était pas si bon que ça en maths.

Dans l'une de ses premières aventures, *L'École du prieuré*, Sherlock Holmes déduit dans quel sens se dirigeait une bicyclette à partir des traces laissées par ses roues. Il explique ainsi son raisonnement à Watson : « L'empreinte la plus profonde est bien entendu celle de la roue arrière sur laquelle repose le poids. Vous voyez plusieurs endroits où elle traverse et oblitère la marque moins profonde laissée par la roue avant. Sans aucun doute, cela s'éloigne de l'école. »

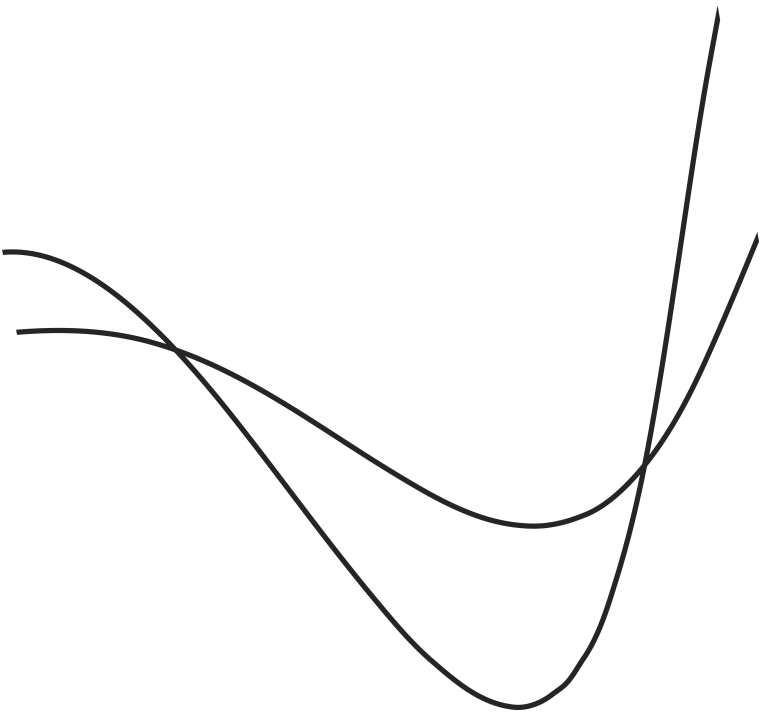
Je ne suis pas sûr de suivre. Quelle que soit la direction du cycliste, la roue arrière ne coupera-t-elle pas sûrement la marque de la roue avant ?

Sir Arthur Conan Doyle, le créateur de Sherlock Holmes, a ici raté son coup. Reste qu'il est bien possible de déduire la direction empruntée par une bicyclette à partir des empreintes de ses roues.

29

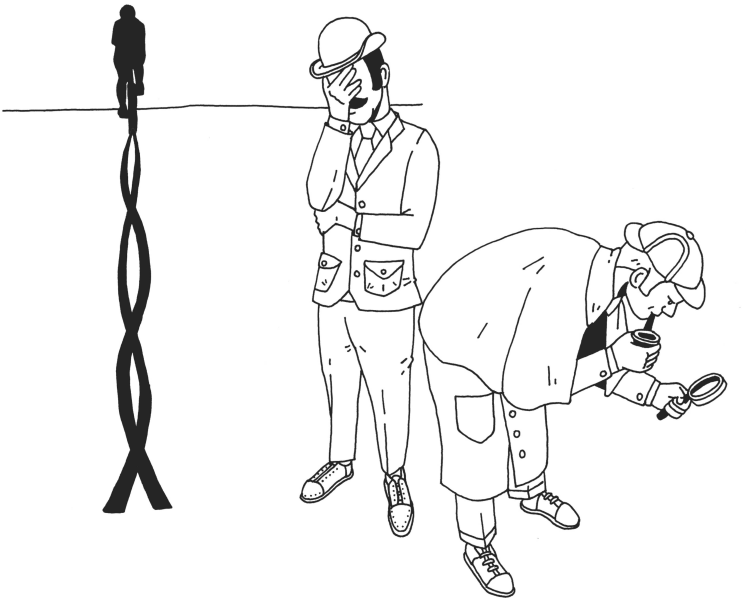
En selle, Sherlock !

Le cycliste qui a laissé les traces suivantes se dirigeait-il de gauche à droite ou de droite à gauche ?



Comme Holmes, essayez d'abord de deviner quelle roue a laissé quelle trace. La ligne supérieure a-t-elle été dessinée par la roue avant ou arrière ? Vous pouvez faire mieux que Holmes : pour trouver, vous n'avez même pas besoin de connaître la profondeur des sillons.

Voici un autre casse-tête de bicyclette. Votre instinct vous dictera peut-être la solution. Une image paraît bonne, l'autre non. Mais pouvez-vous comprendre pourquoi ?

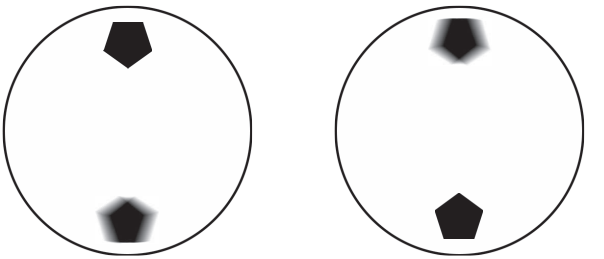


30

Maths floues

Un photographe prend une photo d'une bicyclette en mouvement. Cette bicyclette roule sur une route de gauche à droite ou de droite à gauche, le sens n'a aucune importance. La roue est un disque blanc portant deux pentagones.

Laquelle des deux images ci-dessous correspond à la photo ?



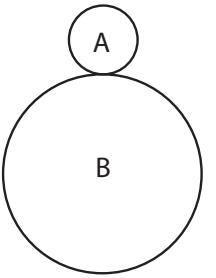
Le casse-tête ci-dessus enseigne que le comportement d'un cercle qui roule est plus subtil qu'il n'y paraît au premier abord !

Le problème suivant provient d'un test d'aptitude générale passé par 300 000 Américains en 1982. Seuls trois étudiants donnèrent la réponse correcte. Y parviendrez-vous ?

31

Des tours de cercles

Le rayon du cercle A est trois fois plus petit que le rayon du cercle B. Le cercle A roule sur le cercle B jusqu'à revenir



au point de départ. Combien de tours a-t-il exécutés sur lui-même ?

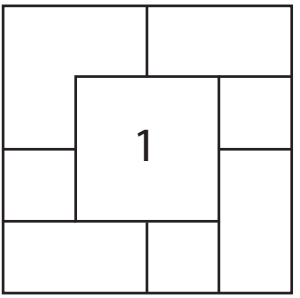
a) 3/2
b) 3
c) 6
d) 9/2
e) 9

Creusons-nous maintenant les méninges de façon complètement différente…

32

Huit carrés bien ordonnés

Huit carrés de papier de taille identique sont disposés sur une table. Leurs bords forment la figure suivante, où seul le carré numéroté 1 est complètement visible ; les autres sont empilés dessous, ne laissant apparaître qu'une partie de leur surface.



Saurez-vous numéroter les autres morceaux de haut en bas, où 2 correspond à la deuxième couche, 3 à la troisième et ainsi de suite ?

J'ai découvert le casse-tête des carrés de papier bien ordonnés dans le brillant recueil de Kobon Fujimura intitulé *The Tokyo Puzzles* (« Les casse-tête de Tokyo »). Ce roi du casse-tête japonais publia entre les années 1930 et 1970 de nombreux livres dont certains furent des best-sellers. Dans les années 1950, il présenta même une émission de télévision hebdomadaire d'énigmes mathématiques. La popularité de Fujimura préfigurait le boom moderne des casse-tête japonais dits « à crayon », incarné par la vogue internationale du sudoku dans les années 2000 que j'évoquerai plus en détail au prochain chapitre.

Les Japonais ont une approche plus ludique des nombres que les Occidentaux. C'est du moins ce que j'ai ressenti les

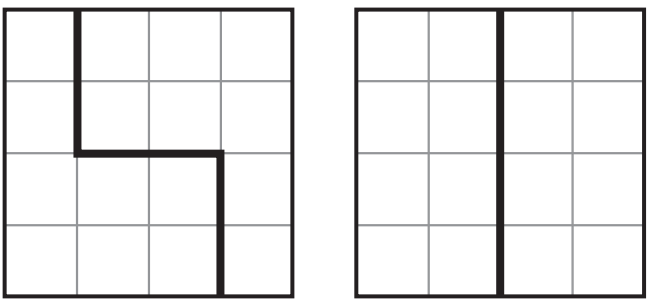
deux fois où je me suis rendu au Japon. Les enfants à l'école récitent leurs tables de multiplication à la manière joyeuse d'une comptine. Un passe-temps populaire a longtemps consisté à jouer avec les nombres figurant sur les tickets de métro. Et le pays a transformé le calcul mental en spectacle sportif. Apprendre le fonctionnement d'un boulier reste de nos jours encore une activité courue après l'école. Un tournoi réunit même les meilleurs pratiquants. Lors du championnat national de bouliers auquel j'ai assisté en 2012, les adversaires devaient additionner quinze nombres qui défilaient moins de deux secondes devant leurs yeux. Un vrai moment de tension et d'excitation !

J'aime aussi beaucoup cet autre casse-tête de Fujimura.

33

Deux moitiés de carré

Un grand carré est subdivisé en seize carrés plus petits. L'illustration ci-dessous présente deux moyens de couper le grand carré en deux morceaux identiques.



Il y a quatre autres façons de procéder. Saurez-vous les trouver ?

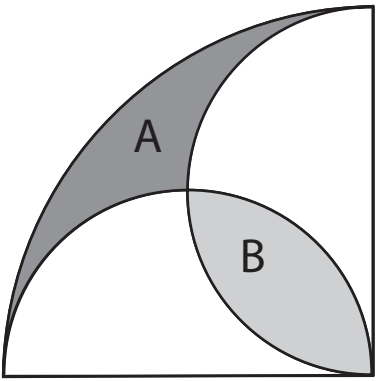
Pour que les choses soient bien claires, vous avez le droit de couper le carré seulement le long des lignes intérieures et les deux formes obtenues doivent être identiques. Autrement dit, si le carré était en carton, vous pourriez faire coïncider les formes en les glissant l'une sur l'autre ; vous n'avez pas le droit de soulever une forme, de la faire basculer puis de la reposer sur la table ; tout doit se dérouler dans le plan.

Voici finalement un casse-tête de Fujimura portant sur des courbes. Il faudra peut-être vous souvenir que l'aire d'un cercle se calcule en multipliant π par le carré du rayon, ce qui s'écrit aussi πr^2.

34

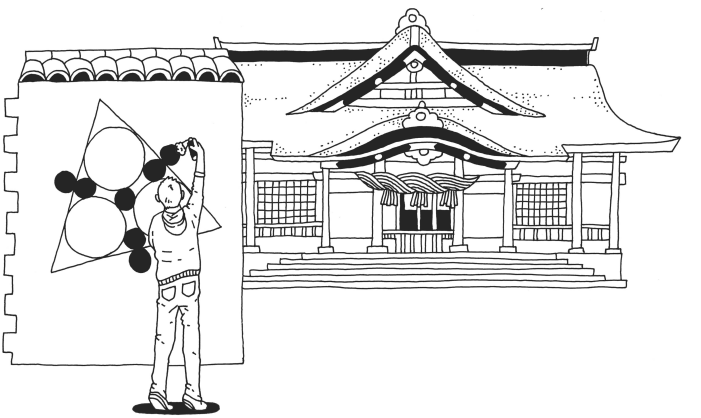
L'aile et la lentille

L'illustration ci-dessous représente un quart de cercle contenant deux demi-cercles plus petits. Montrer que l'aile A et la lentille B ont la même aire.



J'aime ce casse-tête non seulement en raison de l'élégance qui se dégage du dessin, mais aussi parce qu'il me rappelle

cette tradition japonaise qui, du XVIIe au XIXe siècle, consistait à suspendre à l'entrée des temples et des sanctuaires des tablettes de bois décorées de problèmes de géométrie. Nommés *sangaku*, ces ornements mathématiques faisaient office d'offrandes religieuses, tout en contribuant aussi à diffuser les dernières découvertes des savants. Ils concouraient à porter les mathématiques sur la place publique, à ce qu'elles procurent plaisir et émerveillement visuel. J'ai eu l'occasion d'observer l'une de ces tablettes dans un temple de Kyoto. Elle représentait des cercles, des triangles, des sphères et d'autres formes, le tout magnifiquement coloré de blanc et de rouge. La composition harmonieuse des figures géométriques des *sangakus* dégage une esthétique hélas absente des manuels occidentaux, barbouillés de schémas strictement didactiques. Une tablette comporte habituellement une simple image (généralement l'étape finale à laquelle le raisonnement doit mener), agrémentée d'une courte série d'inscriptions dans la partie inférieure. Plusieurs centaines de tablettes nous sont parvenues, comme celle du temple de Nagoya datée de 1865. Le problème qu'elle illustre est attribué à un garçon de 15 ans nommé Tanabe Shigetoshi.

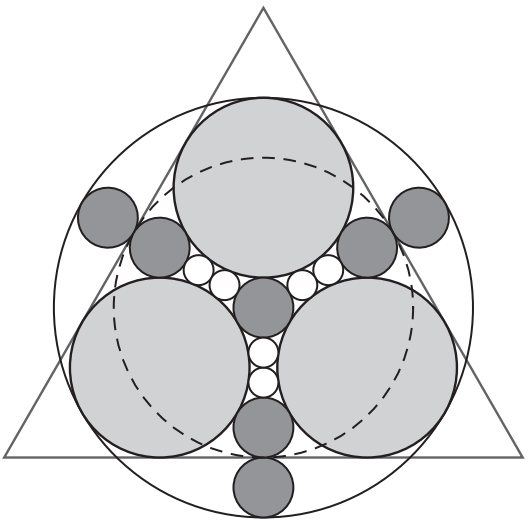


35

Sangaku de cercles

La figure ci-dessous représente cinq types de cercles. Dans l'ordre croissant de taille, nous comptons six petits cercles blancs, sept gris foncé plus grands, trois gris clair, un tracé en pointillé intérieur au triangle et un plus grand marqué en trait plein.

Combien peut-on aligner de rayons d'un cercle blanc le long d'un rayon du cercle en pointillé ?



Ce casse-tête impressionne par sa beauté. Et difficile de savoir par quel bout le prendre ! Je tire mon chapeau au jeune Tanabe. Mais rassurez-vous, une fois que vous aurez trouvé un moyen d'écrire le rayon de certains cercles en fonction d'autres rayons, vous en viendrez sûrement à bout…

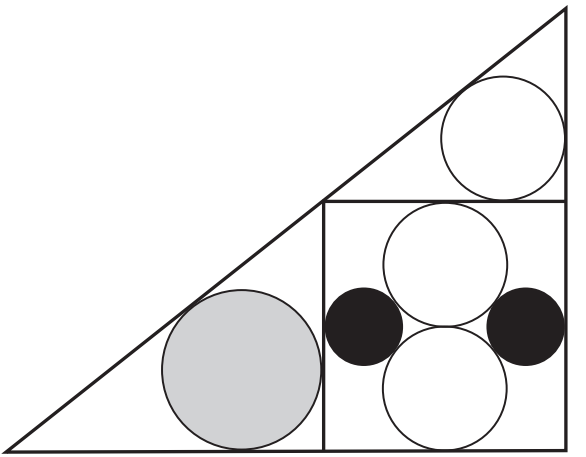
Le sangaku suivant a été conçu par un adolescent japonais encore plus jeune que Tanabe : Sato Naosue, âgé seulement

de 13 ans. Daté de 1847, il était exposé dans un temple situé à près de 500 km au nord de Tokyo. Plus compliqué que le précédent, il demande la connaissance du théorème de Pythagore (rappelé p. 68), comme pour presque tous les problèmes où apparaissent des angles droits.

36

Sangaku du triangle

La figure ci-dessous représente des cercles de trois tailles différentes : deux noirs, trois blancs et un gris. Les deux cercles noirs et deux des cercles blancs sont à l'intérieur d'un carré. Ce même carré ainsi que les deux cercles restants sont eux-mêmes à l'intérieur d'un triangle. Montrer que le rayon du cercle gris fait deux fois le rayon du cercle noir.



Les *tatamis* s'inscrivent aussi dans la tradition japonaise. Ces tapis en paille tressée sur lesquels on marche pieds nus, qui recouvraient jadis le sol des habitations et des temples et équipent aujourd'hui les salles de sport, ont une forme

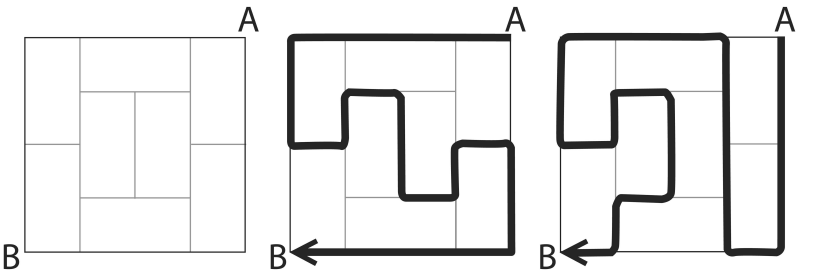
spécifique : ils sont généralement rectangulaires et deux fois plus longs que larges. Difficile pour les mathématiciens de résister à l'attrait de cette simplicité géométrique…

37

Cheminement sur tatamis

Des tatamis sont disposés comme sur la figure à gauche ci-dessous. Imaginons que vous marchiez de A à B en suivant le bord des tapis, avec pour but d'emprunter le chemin le plus long. Une première idée consiste à parcourir d'abord la plus grande ligne droite possible, le côté supérieur, comme sur la figure centrale, ou le côté latéral, comme sur celle de droite.

Il existe un chemin plus long que les deux présentés ci-dessous. Saurez-vous le trouver ?

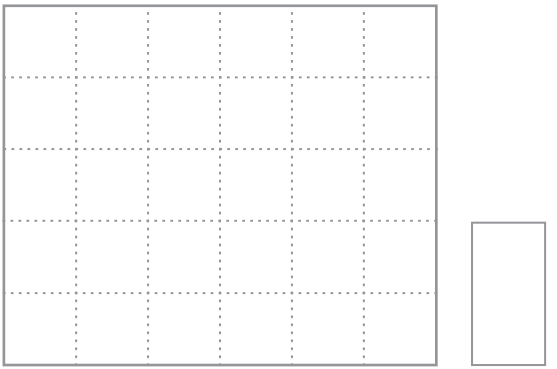


Au cas où vous souhaiteriez un jour poser des tatamis chez vous, sachez qu'il existe une règle à suivre et que l'enfreindre pourrait bien vous coûter cher. La tradition impose en effet de disposer les tapis, comme dans le casse-tête précédent, de façon à ce que la rencontre de trois tatamis forme toujours un T. Gare à vous si vous les placez en formant un + à la jonction de quatre tatamis : vous risqueriez d'attirer le mauvais sort ! Cette superstition donne lieu à d'amusants casse-tête.

38

Quinze tatamis

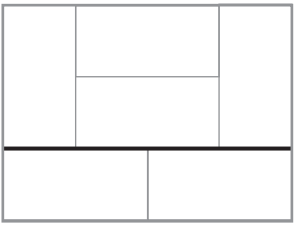
Comment recouvrir le sol de la pièce ci-dessous par quinze tatamis 2 × 1 sans que quatre d'entre eux ne se rencontrent jamais en une intersection de lignes ?



Pour le problème précédent comme pour celui qui suit, je vous suggère de vous munir d'un crayon à papier afin de pouvoir effacer les essais infructueux.

Nob Yoshigahara est un ingénieur japonais qui se mit à concevoir des casse-tête après avoir été brûlé dans une explosion chimique. À sa mort, en 2004, il comptait parmi les grandes personnalités du secteur et cumulait les casquettes d'auteur, d'éditorialiste, de concepteur de jouets, de collectionneur et d'organisateur de conférences internationales. Ses amis parmi les membres de la communauté mondiale des casse-tête se souviennent de lui comme d'un homme charismatique, généreux et toujours espiègle. Sa création la plus célèbre, Rush Hour, un jeu de logique où des voitures et des camions miniatures se déplacent sur un plateau, s'est vendue à quelque dix millions d'exemplaires à travers le monde.

Yoshigahara est l'auteur du casse-tête sous forme d'un arbre de nombres qui ouvre ce livre. Il a également introduit une nouvelle variété de problèmes de tatamis, en interdisant qu'une ligne droite traverse la pièce – comme celle marquée en gras sur la figure ci-dessous.



39

Les tapis de Nob

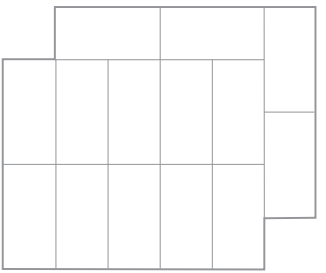
Comment recouvrir la pièce du problème précédent par quinze tatamis 2 × 1 sans qu'aucune ligne droite ne la traverse ? Cette fois, quatre tapis peuvent se rencontrer en une intersection de lignes.

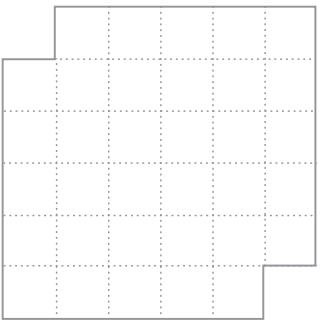
Mais les pièces ne sont pas toujours rectangulaires ! Dans celle représentée ci-dessous, la surface du sol est rognée dans les coins à cause de la présence d'escaliers.

40

Autour d'escaliers

Quand la pièce des deux problèmes précédents est amputée de carrés à deux de ses coins, il est possible de la recouvrir par quatorze tatamis sans espaces vides ni chevauchements, comme le montre la première illustration ci-dessous. (Les tatamis peuvent désormais être placés dans n'importe quelle position.) Passons maintenant à une autre pièce rognée dans les coins, mais de dimension 6 × 6 cette fois. Montrez qu'il est impossible de la recouvrir par dix-sept tatamis sans espaces vides ni chevauchements.



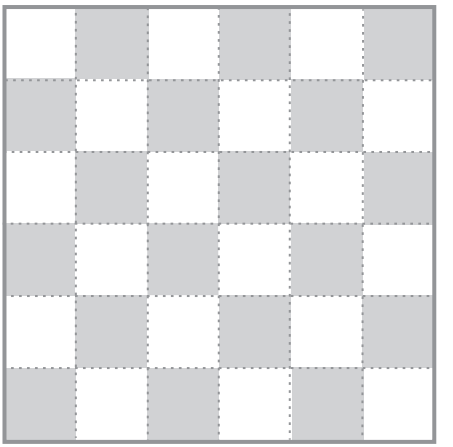


Mais les escaliers ne sont pas toujours repoussés dans les coins des maisons ! Imaginons maintenant qu'ils soient positionnés au hasard dans une pièce.

41

Escaliers aléatoires

Les architectes ont renoncé à l'idée de disposer les escaliers aux coins opposés de notre pièce 6 × 6. Ils ont tracé sur leur plan des cases à la manière d'un échiquier et ont décidé de placer les deux escaliers que leur cliente souhaite installer l'un sur une case blanche et l'autre sur une case noire. Montrez que la salle se laisse alors recouvrir par dix-sept tatamis sans espaces vides ni chevauchement. Les tatamis peuvent être disposés n'importe comment à partir du moment où ils n'empiètent pas sur les deux cases prises par les escaliers.



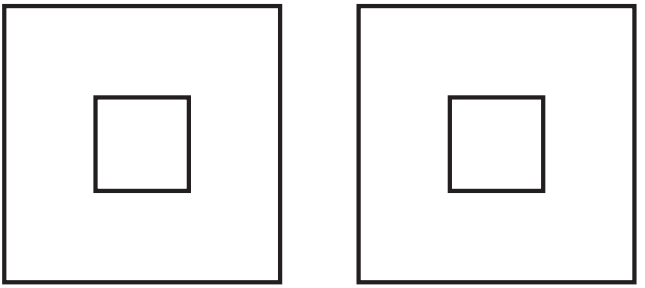
Il s'agit bien de montrer qu'il est toujours possible de paver la pièce, pas seulement de produire un exemple qui marche !

Quand j'ai posté le problème qui suit dans ma rubrique du *Guardian*, plusieurs architectes en ont raillé la simplicité, puisque la solution équipe depuis longtemps les foyers britanniques. Cette réaction rappelle on ne peut plus clairement que les casse-tête d'apparence insurmontable à certains paraissent d'une facilité déconcertante à d'autres.

42

Une structure en bois

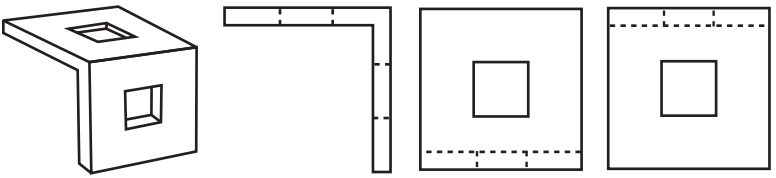
La figure ci-dessous représente vue de dessus et vue de face une structure en bois tridimensionnelle aux côtés plats. Dessinez la structure au moins vue de profil. Et si vous y parvenez, dessinez-la entièrement.



Vue de dessus Vue de face

En architecture et en design, on a l'habitude de représenter les bords visibles des objets par des traits pleins et les bords cachés par des traits en pointillé. J'ai repris cette convention pour dessiner la figure de l'énoncé. Cela signifie que si vous proposez comme solution une structure constituée de deux faces carrées percées au milieu d'un trou carré et jointes à un bord (voir ci-dessous), vous avez tout faux : les vues de côté, de face ou de dessus devraient alors comporter des traits en pointillé pour visualiser les bords cachés, comme sur les illustrations. Pas de problème pour la vue de côté, car je ne vous l'ai pas donnée. Mais les bords cachés des autres vues contrediraient les diagrammes de l'énoncé, qui n'affichent eux aucun trait en pointillé.

Il est important de noter que la structure étant fabriquée de bois, l'épaisseur d'une de ses parties n'est jamais nulle.



Vue 3D Vue latérale Vue de dessus Vue de face

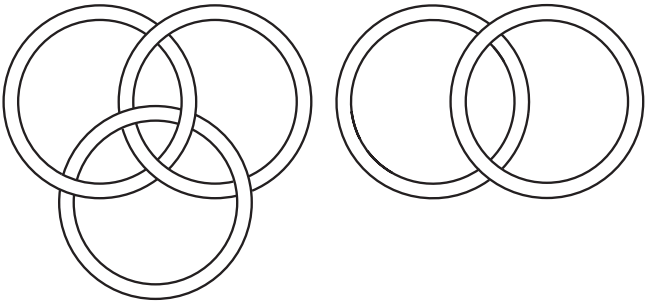
Les deux casse-tête suivants nous amènent à l'intérieur de la maison.

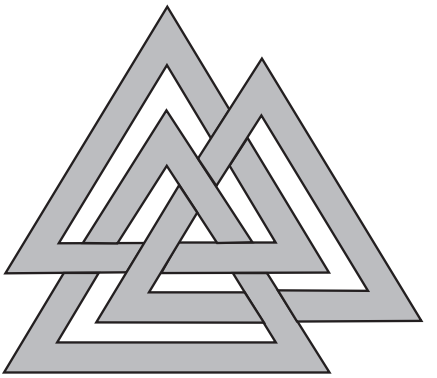
Les anneaux borroméens composent une structure mathématique fascinante : il s'agit de trois anneaux entrelacés qui présentent l'étrange propriété de se délier quand vous en retirez un seul – voyez l'illustration ci-dessous. (La figure est légèrement fausse en ce sens que si vous fabriquiez ces anneaux dans un matériau rigide, leurs chevauchements les contraindraient à se positionner de façon légèrement différente.) Je trouve contre-intuitif et amusant que ces anneaux considérés ensemble soient inséparables alors qu'aucun d'entre eux n'est individuellement lié à un autre. Les anneaux borroméens sont un symbole classique pour exprimer l'idée que trois parties de quelque chose sont interdépendantes les unes des autres. Dans l'iconographie chrétienne par exemple, ils sont utilisés pour représenter la Sainte Trinité.

Ces anneaux doivent leur nom aux Borromeo, une famille de la Renaissance italienne, dont le blason portait trois anneaux entrelacés. Un tel agencement de formes préexistait toutefois, notamment dans le *valknut* viking, un emblème constitué de trois triangles enchevêtrés souvent reproduit de nos jours sur des tatouages, des pendentifs ou les T-shirts d'amateurs de heavy metal.

L'idée que trois parties liées se désolidarisent lorsqu'on en détache une est aussi au cœur du prochain casse-tête.

Anneaux borroméens



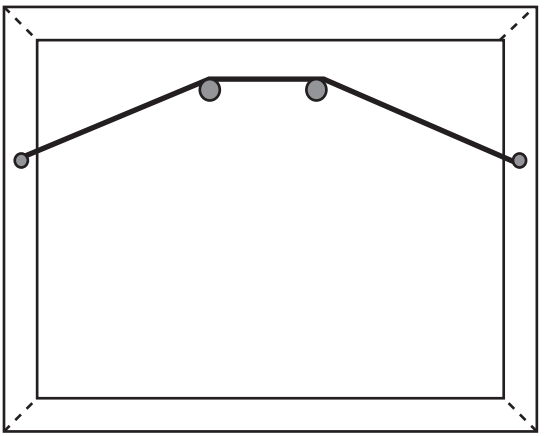


Valknut

43

Le tableau sur le mur

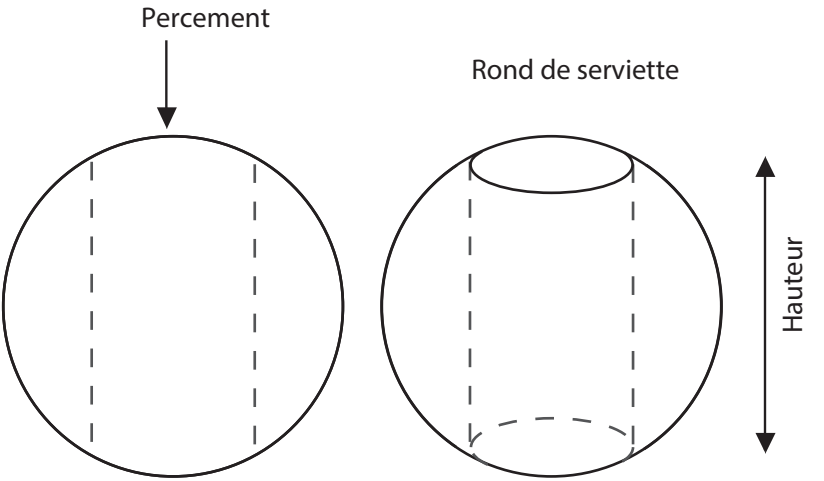
La façon habituelle d'accrocher un tableau est de planter deux clous à l'arrière du cadre et d'y suspendre une cordelette comme indiqué sur l'image ci-dessous.



L'avantage des deux clous tient à ce que la chute de l'un n'entraîne pas celle du tableau, toujours maintenu par l'autre.

Saurez-vous trouver une façon d'enrouler la cordelette autour des clous de façon à ce que la chute de l'un entraîne nécessairement celle du tableau ? (La cordelette peut être allongée si besoin.)

Les anneaux et les tableaux nous amènent naturellement à cet autre objet banal du quotidien susceptible de titiller le mathématicien qui sommeille en chacun de nous. On s'en sert à table et il prend la forme d'une sphère percée d'un trou cylindrique passant par son centre. Vous avez trouvé ? Le rond de serviette. Le casse-tête suivant est un bijou au regard de la concision de ses données.



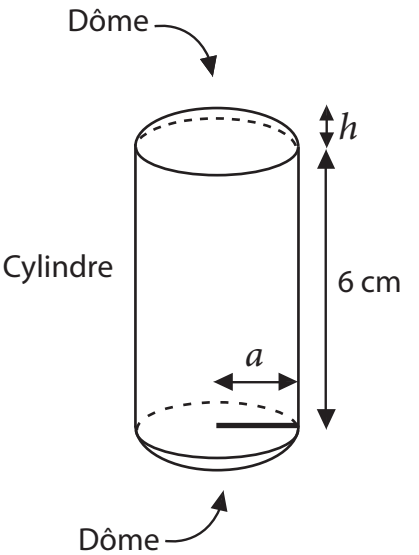
44

Un rond de serviette remarquable

Un rond de serviette mesure 6 cm de haut. Quel est son volume ?

Le travail un peu pénible que demande la résolution ne doit pas vous arrêter. Je vous montre le chemin. Le casse-tête vaut le détour, croyez-moi.

Le volume du rond de serviette est le volume de la sphère moins le volume de la partie centrale, qui a la forme d'un cylindre légèrement boursouflé aux extrémités (les renflements ont l'aspect de dômes, autrement dit de sphères tronquées).



La hauteur du cylindre vaut 6 cm. Soit r le rayon de la sphère, h la hauteur du dôme et a le rayon de la section du cylindre, par ailleurs rayon de la base du dôme. Il nous faut encore les formules de ces différents volumes, que je vous livre généreusement :

- volume de la sphère : $(4/3)\pi r^3$;
- volume du cylindre : $\pi a^2 \times 6$ cm, ou $6\pi a^2$;
- volume de chaque dôme : $(\pi h/6)(3a^2 + h^2)$.

Nous y sommes presque… Le volume du rond de serviette est égal au volume de la sphère moins le volume du cylindre moins deux fois le volume d'un dôme. Par le théorème de Pythagore, nous pouvons exprimer a en fonction de r. Et

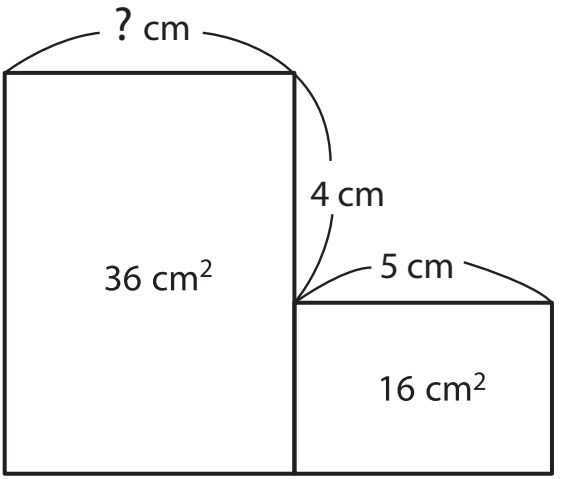
donc écrire le volume du rond avec *r* pour seule variable. Ce qui donne une formule longue comme le bras débordant de *r* et de π…

Alors qu'attendez-vous ? À vos stylos !

L'historien Hérodote rapporte que la géométrie est née en Égypte du besoin d'estimer les surfaces des terres arables après chaque crue du Nil. Aujourd'hui encore, nous commençons l'apprentissage de la géométrie par le calcul des aires de carrés ou de rectangles : en multipliant simplement un côté par un côté voisin.

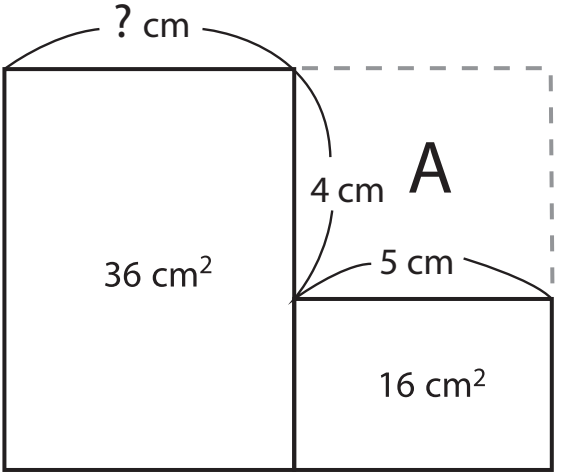
La seule connaissance de cette procédure très simple suffit à résoudre le merveilleux casse-tête Menseki Meiro, ou Aire mystérieuse, du concepteur japonais Naoki Inaba.

Voici un avant-goût du problème afin de vous mettre dans le bain. Votre défi ? Trouver la largeur du grand rectangle. Comme le dessin n'est pas à l'échelle, inutile de chercher à la mesurer avec une règle.



L'élégance de ce casse-tête tient à ce que sa résolution passe entièrement par la géométrie et les nombres entiers. Il

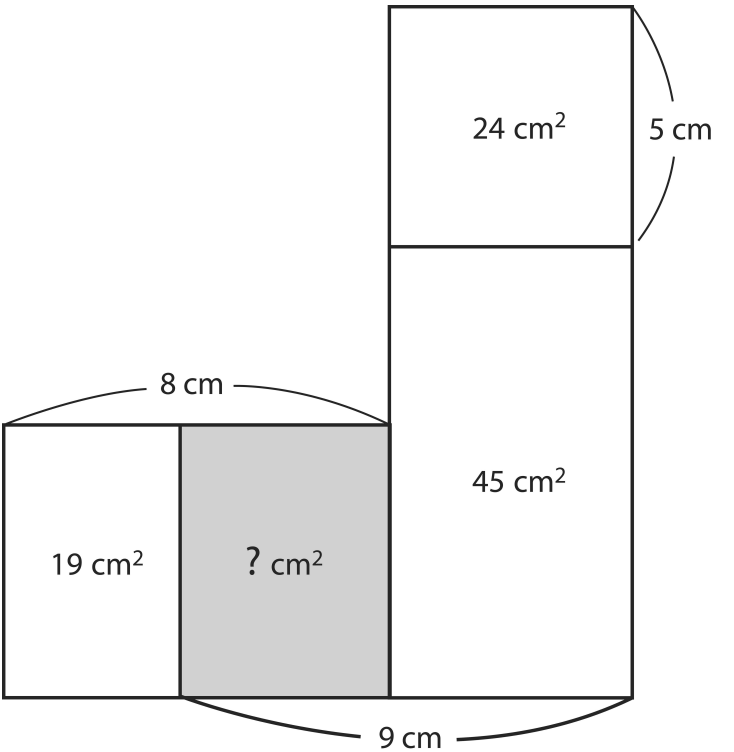
ne s'agit pas de l'alourdir par des équations ou – pis encore – par des fractions. Pour évaluer la distance recherchée, complétons le grand rectangle comme illustré plus bas. Il est clair que la surface A mesure 4 cm × 5 cm = 20 cm^2. La surface A ajoutée au rectangle en dessous mesure donc 20 cm^2 + 16 cm^2 = 36 cm^2. Cette surface est donc identique à celle du rectangle de gauche. Comme la hauteur de ces deux surfaces est identique, il en va de même pour leur largeur : la valeur manquante est donc 5 cm.



45

Aire mystérieuse

Trouvez la surface du rectangle gris.



Même si Naoki Inaba est sans doute le meilleur et le plus talentueux des concepteurs de casse-tête logiques encore en activité aujourd'hui, son travail n'est pratiquement pas reconnu hors de son pays. En fait, le Japon abrite probablement la plus vibrante communauté dédiée aux casse-tête du monde, et cela grâce à des personnalités comme Inaba ou l'éditeur de magazines Nikoli.

Si le nom de Nikoli ne vous dit rien, je doute qu'il en aille de même des sudokus, dont les premiers spécimens parurent dans le magazine *Puzzle Communication Nikoli* au milieu des années 1980. Pour la petite histoire, le terme *sudoku* est la nouvelle dénomination d'un casse-tête initialement intitulé *Number Place* (« Place des nombres »), publié dans le magazine américain *Dell Pencil Puzzles and Word Games*. Au cas où vous auriez vécu dans une grotte ces dix dernières années, sachez que ce type de casse-tête se présente sous la forme d'une grille 9 × 9 parsemée de chiffres. Le but consiste à remplir les cases vides de façon à ce que chaque chiffre n'apparaisse qu'une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne, ainsi que dans chaque sous-carré 3 × 3 de la grille principale.

Toujours est-il que le sudoku resta confidentiel jusqu'en 1986, date à laquelle Nikoli décida de disposer les chiffres donnés dans l'énoncé selon un motif symétrique, comme les lettres dans certains mots croisés. L'astuce fonctionna et les sudokus remportèrent un vif succès. Le jeu passa en Occident fin 2004, après qu'un anglophone nommé Wayne Gould, qui l'avait découvert lors de vacances au Japon, proposa des grilles qu'il avait conçues à l'aide d'un programme informatique à divers journaux, dont le *Times* à Londres. Quelques mois après cette première apparition, des rubriques quotidiennes de sudokus avaient éclos dans de nombreux journaux à travers le monde.

L'ironie veut que l'éditeur Nikoli soit aujourd'hui connu pour un jeu qu'il n'a pas créé. Depuis le lancement en 1980 de son magazine trimestriel, il a en effet lancé plus de six cents nouveaux types de casse-tête ! Et notamment des problèmes comparables au sudoku, où il s'agit de remplir une grille, habituellement carrée.

Une partie du charme de ces casse-tête provient aussi de l'attention portée aux détails ou à la présentation : les éléments sont souvent disposés de manière symétrique dans

les grilles. Les règles sont toujours très simples et le fait de remplir progressivement les trous au crayon procure un sentiment de satisfaction proche de l'addiction ; pour les gens comme moi, c'est aussi un exercice méditatif ou presque, comme peut l'être parfois le coloriage. J'ai choisi quatre exemples de ces jeux pour vous convaincre de leurs bienfaits.

Le magazine édité par Nikoli est tiré à environ 50 000 exemplaires. Ses lecteurs ne se contentent pas toujours de jouer, mais envoient également leurs propres créations. La revue en reçoit des centaines chaque année. L'idée du casse-tête suivant, le Shikaku, a été soumise à Nikoli par un étudiant de 21 ans nommé Yoshinao Anpuku. Anpuku a été ultérieurement embauché par la société, où il occupe aujourd'hui le poste de directeur éditorial !

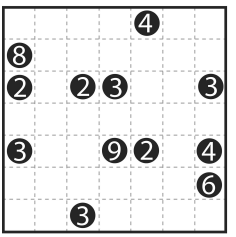
46

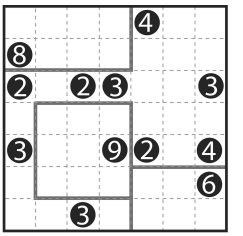
Shikaku

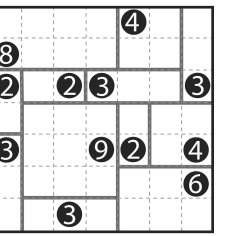
Le Skikaku consiste à décomposer une grille en « boîtes » carrées ou rectangulaires. Les nombres donnés dans la grille déterminent la surface de la boîte contenant ce nombre (mesurée en nombre de cellules).

Je vous guide sur un exemple. L'illustration en haut de la page suivante présente la grille A, à résoudre, et la grille C, solution, avec toutes ses boîtes. Un bon moyen de démarrer consiste à regarder le plus grand nombre dans la grille, car il contraint souvent fortement la forme et la position de sa boîte. Il s'agit ici de 9.

Ses seules boîtes possibles sont un rectangle 9 × 1 ou un carré 3 × 3. Comme aucune rangée horizontale ou verticale de 9 cellules ne passe par lui, sa boîte est le carré, qui ne

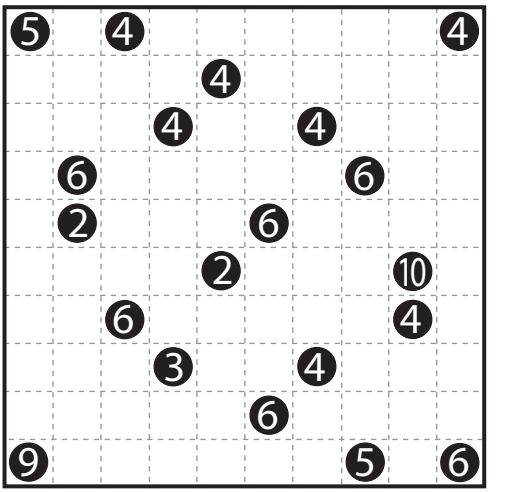

A


B


C

peut prendre que la position représentée sur le diagramme B. De la même façon, la seule boîte rectangulaire de 8 cellules contenant le 8 et la seule boîte rectangulaire de 6 cellules contenant le 6 se trouvent nécessairement aux positions désignées. Une fois ces boîtes initiales en place, la position des autres se déduit plus facilement.

À vous de jouer maintenant !



La société Nikoli fut fondée par Maki Kaji, un turfiste invétéré, qui a donné à sa société le nom d'un cheval de course. (Nikoli a couru notamment en 1980 la célèbre course du derby à Epsom, en Angleterre.) J'ai eu le plaisir

de faire la connaissance de Kaji dans les bureaux de Nikoli à Tokyo en 2008. Il m'avait alors entretenu de deux de ses hobbies : collectionner les élastiques et photographier les plaques d'immatriculation représentant des multiplications – comme 23 06 (2 × 3 = 6) ou 77 49 (7 × 7 = 49)…

Quand je l'ai revu, en 2016, il m'a assuré que sa collection d'élastiques ne manquait pas de s'étendre, avec des articles paraît-il tout à fait remarquables en provenance de Thaïlande et de Hongrie. Quant aux plaques d'immatriculation, il possède les photos de près de 85 % des tables de multiplication de un à neuf. « J'arrive au bout. Mais j'ai pour règle de ne jamais chercher à les trouver. Je ne photographie que celles sur lesquelles je tombe incidemment. »

47

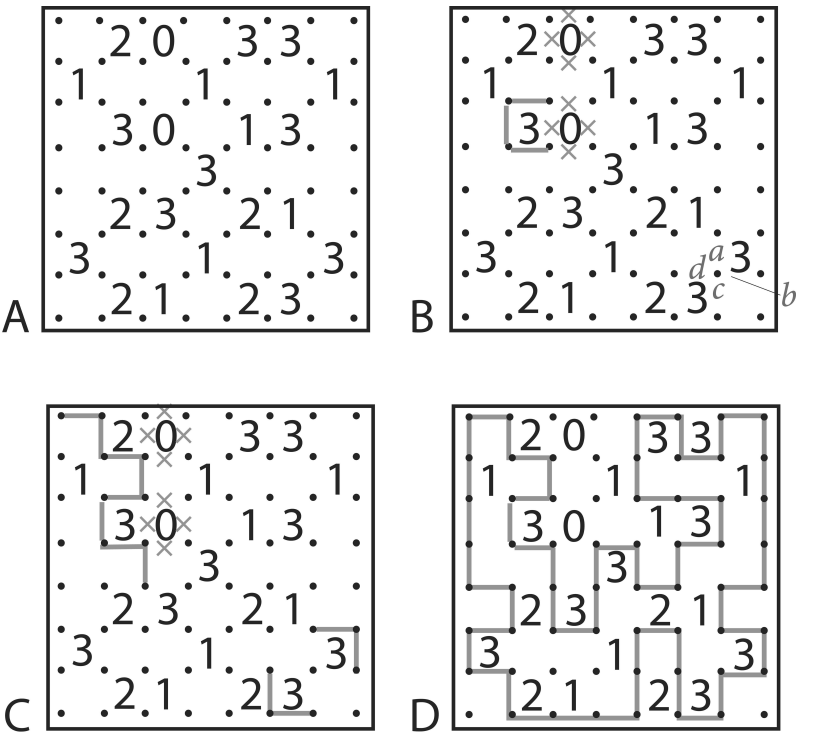
Slitherlink

Dans le Slitherlink, l'objectif est de connecter les points d'une grille de façon à dessiner une unique boucle s'étendant sur toute la surface. Un chiffre dans une case précise le nombre de traits, qui peuvent être horizontaux ou verticaux et qui doivent entourer la case en question. Un seul trait devra donc côtoyer un 1, deux un 2, etc. Vous ne savez pas combien de traits entourent une case sans chiffre. La boucle finale ne doit jamais se recouper ou bifurquer.

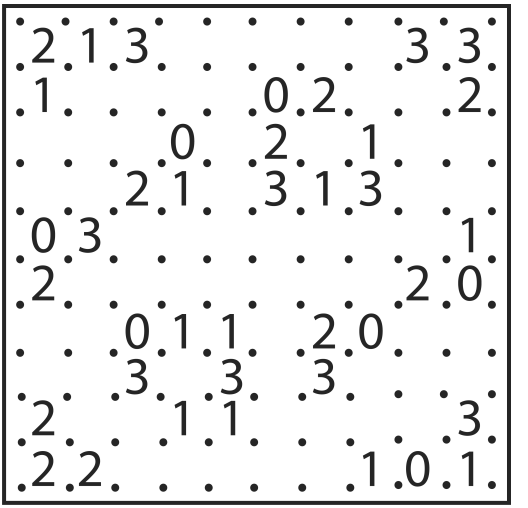
Sur le diagramme A présenté ci-dessous, les 0 forment de bons points de départ car aucun trait ne pourra les entourer. Marquons de petites croix autour des 0, comme sur le diagramme B, afin de signaler l'interdiction de passer par là. L'une de ces croix se situe près d'un 3 et laisse seulement trois autres espaces possibles autour de lui. Traçons les traits correspondants. Comme le montre le diagramme C, ce

début de chemin peut être continué vers le haut, avec un seul choix pour entourer le 2.

Remarquez que sur le diagramme B, j'ai aussi indiqué par *a*, *b*, *c* et *d* les espaces où des traits potentiels pourraient provenir du point entre les deux 3. La boucle passe nécessairement par ce point, comme tous les points d'une cellule contenant un 3. Le tracé doit passer soit par *a*, soit par *b* et soit par *c*, soit par *d*, puisque s'il passait à la fois par *a* et *b* ou par *c* et *d*, il formerait une branche interdite. Dans tous les cas, il passera par les deux autres côtés des deux 3, d'où leur inscription sur le diagramme C. La boucle finale est représentée sur le diagramme D.



Prêt ? Voici un Slitherlink rien que pour vous. Souvenez-vous que le tracé forme une unique boucle, qui ne se rencontre ni ne bifurque. Le problème admet une unique solution, qui se trouve par la seule force de la logique.



Slitherlink est l'un des casse-tête favoris de Kaji et c'est l'un de mes préférés aussi. Construire le chemin qui s'entortille petit à petit dans la grille jusqu'à revenir à son point de départ me procure un sentiment d'accomplissement.

48

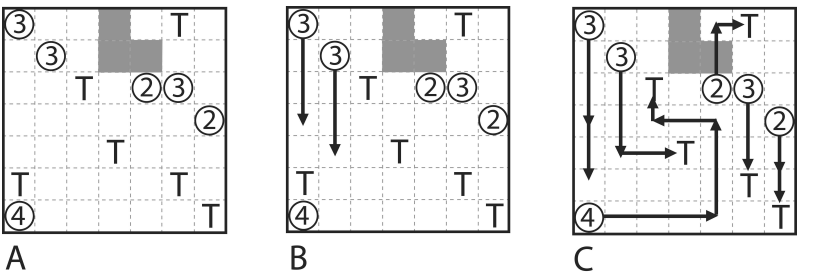
Herugolf

Nikoli propose en permanence de nouveaux types de casse-tête. Le Herugolf est un jeu récent inspiré du golf, en particulier de la phase où, vous approchant du trou, vous devez raccourcir vos coups. Ici, chaque balle, symbolisée par un cercle, doit être envoyée dans son trou correct, désigné

par T. Le nombre dans le cercle indique la distance en cases que parcourra la balle au premier coup. Si elle n'atteint pas la case T à l'issue du premier coup, le deuxième coup l'enverra une case moins loin, le troisième encore une de moins, et ainsi de suite. Ainsi, une balle marquée d'un 3 doit parcourir exactement trois cases, ou trois puis deux cases, ou trois puis deux puis une case. Les balles se déplacent horizontalement ou verticalement. Un nouveau coup se joue ou non dans la même direction que le précédent.

Les trajectoires des balles ne peuvent pas se croiser et les balles doivent atteindre exactement les trous à la fin des coups. Deux balles distinctes doivent tomber dans des trous distincts. Les cases grisées représentent des bunkers. Un coup peut envoyer la balle par-dessus un bunker, mais pas dedans.

Dans l'exemple qui suit, le diagramme A représente la grille de départ.

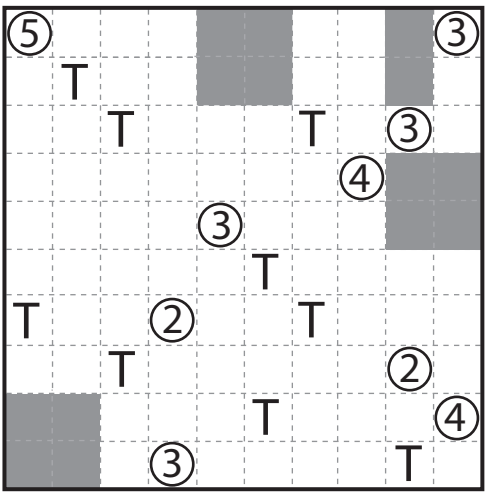


Une bonne méthode consiste d'abord à repérer les balles à la trajectoire déterminée. La balle 3 du coin supérieur gauche, par exemple, doit se déplacer de trois cases au premier coup. Comme un bunker lui interdit la direction horizontale, elle doit se mouvoir verticalement, ainsi que l'illustre le diagramme B.

De la même façon, la balle 3 adjacente en diagonale atterrirait dans un bunker si elle se déplaçait horizontalement :

elle doit donc se mouvoir vers le bas. Chacune de ces balles doit ensuite parcourir deux cases. Comme les trajectoires ne peuvent se croiser, celle du coin supérieur gauche doit continuer et tombe dans le trou. L'autre balle doit se déplacer horizontalement, faute de trous atteignables au coup suivant vers le bas. Elle atteint donc elle aussi son trou. La solution complète est représentée sur le diagramme C.

Et maintenant, à vos clubs !



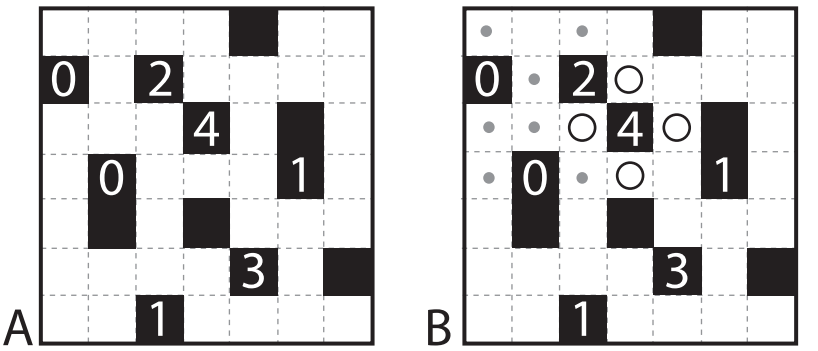
49

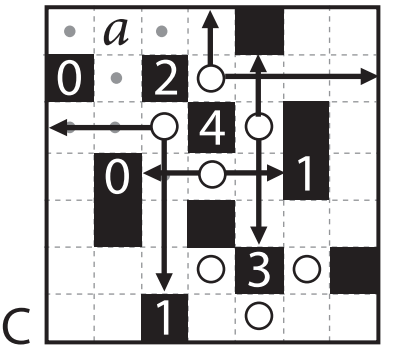
Akari

Le dernier casse-tête de Nikoli que je vous propose, Akari (« lumières »), s'inspire lui aussi du monde réel, en l'occurrence de lampes qui éclairent une pièce. Il s'agit d'illuminer la totalité de la grille en disposant des ampoules, symbolisées par des cercles. Chaque chiffre sur une case noire

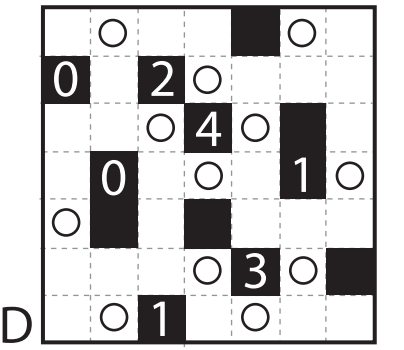
précise le nombre d'ampoules à positionner dans les cases environnantes, directement au-dessus, en dessous, à droite ou à gauche de la case en question. Une ampoule éclaire toutes les cases non bloquées de sa ligne et de sa colonne. Les cases non adjacentes aux chiffres peuvent ou non contenir des ampoules. Pour finir, toutes les cases blanches doivent être éclairées sans qu'aucune ampoule ne bloque la lumière d'une autre.

Dans l'exemple qui suit, le diagramme A illustre la situation de départ. Comme chaque nombre indique combien d'ampoules jouxtent ce nombre horizontalement et verticalement, nous savons que des ampoules se trouvent dans toutes les positions horizontales et verticales à côté du 4 et qu'il n'y en a aucune à proximité horizontale et verticale des deux 0, ce que j'ai désigné par des points sur le diagramme B. Comme deux des ampoules adjacentes au 4 jouxtent aussi le 2, les deux autres cases du 2 ne peuvent contenir d'ampoules, ce qui permet d'ajouter un point.





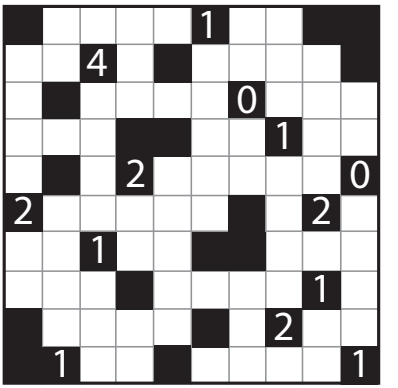
C



D

Sur le diagramme C, les flèches indiquent les lignes et les colonnes éclairées par les quatre ampoules placées dans le diagramme précédent. La case au-dessus du 3 ne peut pas contenir d'ampoule parce qu'elle se trouve sur le chemin d'une autre : les trois autres cases jouxtant le 3 doivent donc en contenir une. La case marquée *a* doit également contenir une ampoule car toutes les autres positions susceptibles de l'éclairer sont interdites, soit par la présence d'un point déjà marqué, soit parce qu'elles figurent sur le trajet d'une autre ampoule. Le casse-tête entièrement résolu est présenté sur le diagramme D.

À vous maintenant d'apporter vos lumières sur le diagramme page suivante !

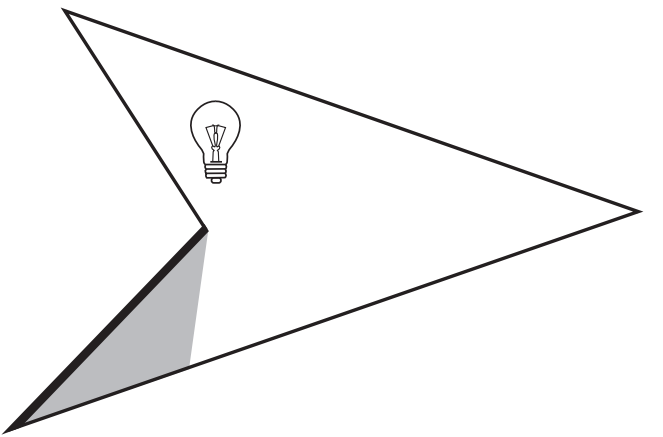


La disposition d'ampoules dans des pièces étonnantes conduit à notre ultime casse-tête géométrique.

50

Le cabinet noir

L'illustration ci-dessous représente une coupe horizontale transverse de la pièce d'une maison.



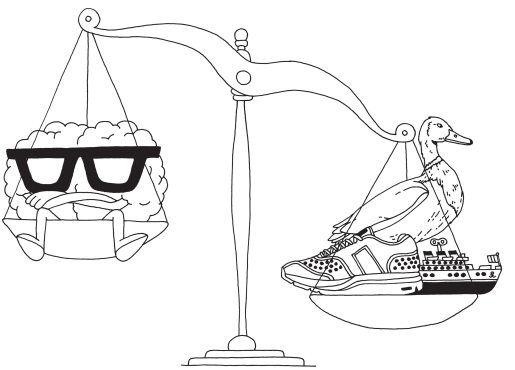
La position de l'unique source de lumière est marquée par l'ampoule. Allumée, elle laisse le pan de mur tracé en gras complètement dans l'ombre. (Nous supposons que les autres murs ne reflètent aucune lumière.)

Concevez maintenant une pièce aux murs droits dans laquelle une unique source de lumière judicieusement placée laissera tous les murs en partie ou en totalité dans l'ombre.

Les murs doivent tous se joindre. Les murs solitaires ou les bords saillants sont bien entendu interdits.

Et que le dernier à résoudre ce problème éteigne en sortant !

PROBLÈMES PRATIQUES



Satanées volailles !

Êes-vous plus intelligent qu'un enfant de 12 ans ?

Règlement de la classe : les calculatrices sont interdites.

1) Parmi les cinq pièces de puzzle ci-dessous, quatre s'assemblent pour former un rectangle : laquelle reste de côté ?

2) Une fois les fractions suivantes classées par ordre croissant, laquelle se trouve au milieu ?

A ½ **B** 2/3 **C** 3/5 **D** 4/7 **E** 5/9

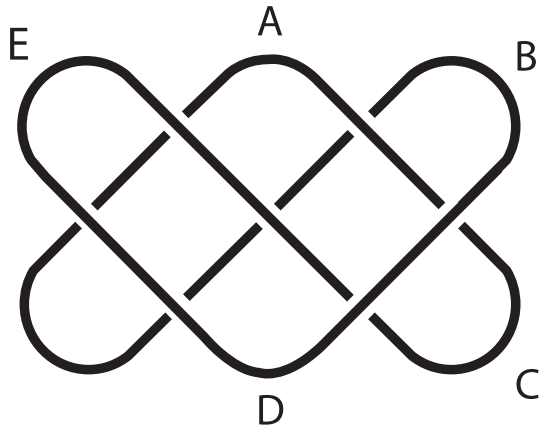
3) « La phrase suivante contient ____ fois la lettre *e* »

six sept huit neuf dix

Parmi les cinq mots ci-dessus, combien sont susceptibles de compléter la phrase sans la faire mentir ?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

4) Un « Lusona » est un dessin tracé à la baguette sur le sable par les Tchokwés, un peuple bantou du centre-ouest de l'Afrique. L'artiste le compose d'un unique trait, qui démarre et s'achève au même endroit. Par quel point A, B, C, D ou E celui représenté sur le diagramme page suivante a-t-il pu commencer ? (La ligne brisée, en un croisement, est tracée avant la ligne continue – qui passe par-dessus.)



5) Parmi les nombres suivants, lesquels sont divisibles par tous les entiers de 1 à 10 compris ?

A 23 × 34 **B** 34 × 45 **C** 45 × 56 **D** 56 × 67 **E** 67 × 78

6) Valet de cœur : « J'ai volé les tartes »
Valet de trèfle : « Le valet de cœur ment. »
Valet de carreau : « Le valet de trèfle ment. »
Valet de pique : « Le valet de carreau ment. »
Combien de valets disent la vérité ?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** L'information n'est pas suffisante

7) Un cube est peint de façon à ce que deux faces présentant une arête commune ne soient jamais de la même couleur. Combien faut-il de couleurs au minimum ?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

8) Mamie jure qu'elle rajeunit. Selon ses calculs, elle est quatre fois plus âgée que moi aujourd'hui, alors qu'il y a cinq ans, son âge valait cinq fois le mien à l'époque. Quelle est la somme de nos âges actuels ?

A 95 **B** 100 **C** 105 **D** 110 **E** 115

9) Dans l'expression suivante, remplacez chaque

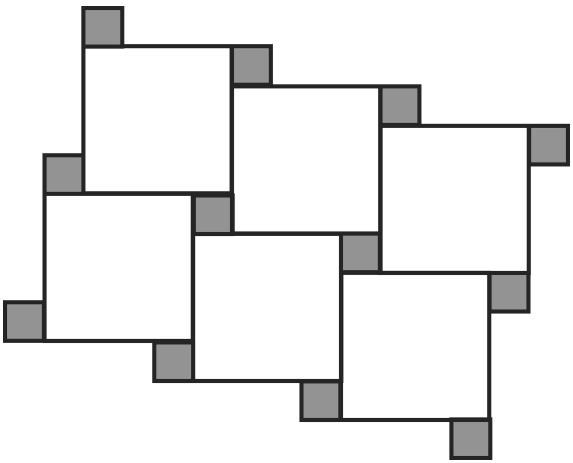
par + ou – de façon à ce que le résultat donne 100.

123 □ 45 □ 67 □ 89

Si p désigne le nombre de + et m le nombre de moins, quelle est la valeur de $p - m$?

A –3 **B** –1 **C** 0 **D** 1 **E** 3

10) Le carrelage représenté ci-dessous est composé de carreaux carrés gris de côtés de longueur 1 et de carreaux carrés blancs de côtés de longueur 4. Il recouvre un sol immense. Parmi les rapports suivants, lequel s'approche le plus du rapport entre le nombre de carreaux gris et blancs ?



A 1:1 **B** 4:3 **C** 3:2 **D** 2:1 **E** 4:1

Ce chapitre regroupe les casse-tête propres au monde réel. Certains mettent en scène des objets du quotidien : des bols, des cruches, des seaux, des voitures ou des pommes de terre. D'autres évoquent des situations banales de l'existence, comme une course à pied, un voyage en avion ou, pour commencer, un problème antédiluvien auquel *Homo sapiens* a été confronté à toutes les époques : comment acheter judicieusement sur les marchés ?

51

Cent volailles

Un coq coûte 5 pièces, une poule 4 pièces et un poussin ¼ de pièce. Combien de coqs, de poules et de poussins emporterez-vous en achetant cent volailles pour 100 pièces ?

Les problèmes concernant l'achat de cent animaux de trois types différents pour cent unités monétaires sont apparus en Chine au Ve siècle. L'énoncé ci-dessus, postérieur d'une centaine d'années, a été formulé par le mathématicien Zhen Luan.

Ce casse-tête brille par la concision de la question, qui tranche avec la difficulté bien réelle de la solution. Testez quelques nombres mentalement et laissez-vous emporter… Après avoir acquis une grande popularité en Chine, les casse-tête de type « cent animaux » ont gagné l'Inde, le Moyen-Orient et l'Europe.

Les *Propositiones* d'Alcuin, le recueil mentionné dans le chapitre sur les problèmes logiques, le présentaient sous trois formes différentes : avec des verrats à 10 deniers, des truies à 5 deniers et des porcelets à un demi-denier ; avec des chevaux à 3 ducats, des bœufs à 1 ducat et des moutons à deux douzaines le ducat ; avec des chameaux à 5 ducats, des ânes à 1 ducat et des moutons à deux dizaines le ducat. Ce dernier problème s'intitulait « le casse-tête du marchand oriental », en hommage à sa lointaine origine géographique sans doute.

La façon moderne d'aborder ces problèmes consiste à les traduire en équations. En désignant par x, y et z les nombres inconnus de coqs, de poules et de poussins, l'énoncé de Zhen Luan se reformule ainsi :

1) $x + y + z = 100$ (100 volailles en tout).
2) $5x + 4y + z/4 = 100$ (100 pièces de monnaie en tout).
Résolvez ce système et vous aurez la réponse.

Zhen Luan, Alcuin et leurs contemporains respectifs s'étaient attaqués à ces problèmes en tâtonnant, et s'ils en venaient parfois à bout, c'était après moult essais et erreurs. À leur décharge, l'algèbre n'avait pas encore été inventée. Leur résolution par les équations est beaucoup plus directe – et peut-être même plus amusante. En fait, et c'est ce que j'apprécie particulièrement chez eux, ces problèmes de type

« cent animaux » ont été parmi les premiers à démontrer la fabuleuse puissance des méthodes algébriques…

Ainsi, les casse-tête ont joué un rôle dans le développement et la diffusion de ces nouvelles techniques mathématiques, non seulement en faisant la publicité de leur redoutable efficacité, mais aussi en servant d'aiguillons plus tard aux mathématiciens du Moyen Âge et de la Renaissance pour approfondir leurs réflexions.

L'algèbre est la branche des mathématiques qui représente les nombres et les quantités par des symboles (des *x*, *y* et *z)* dans les équations. Le mot vient de l'arabe *al-jabr*, qui signifie « reconstruction » ou « restauration ». Le savant bagdadi du IXe siècle Al-Khwarizimi employa ce terme pour nommer l'opération mathématique qui correspond aujourd'hui à faire passer un terme d'une équation d'un côté à l'autre du signe égal, autrement dit à le prendre d'un côté pour le « restaurer » de l'autre.

Via l'*al-jabr* et d'autres procédures, Al-Khwarizmi développa des techniques de résolutions d'équations simples. Ces idées essaimèrent grâce à un mathématicien égyptien né au IXe siècle, Abu Kamil, auteur de l'un des premiers ouvrages sur la question. Il y traitait notamment du casse-tête des cent volatiles pour cent unités monétaires en précisant à son sujet :

« J'ai vu l'une des sortes d'arithmétique, qui circule entre les hommes de science et les hommes du commun, entre le savant et l'ignorant, avec laquelle ils se divertissent et qu'ils apprécient, qu'ils trouvent ingénieuse et à propos de laquelle les uns interrogent les autres. Celui qui, parmi eux, répond, le fait par conjecture et par intuition, sans revenir en cela à un principe ou à une inférence. […] J'ai donc décidé de composer un livre sur cette sorte, dans lequel je rends facile le procédé qui s'y trouve et le rends accessible. »

Résolvons le problème à la main. Rappelons nos données :

1) $x + y + z = 100$;

2) $5x + 4y + z/4 = 100$.

Résoudre un tel *système d'équations*, pour reprendre le terme consacré, demande en général autant d'inconnues que d'équations. Pour trois inconnues, il nous faut donc trois équations. Or nous n'en avons que deux… Mais l'énoncé fournit un surcroît d'information qui permet de résoudre le problème. Nous pouvons supposer que les volatiles ne sont pas vendus par quart ou par moitié, ni en quantités négatives. (Et nous tenons aussi pour acquis qu'il faille acheter au moins un animal de chaque type.) Les valeurs x, y et z doivent donc être entières et positives et, bien sûr, inférieures à 100.

Au travail ! Multiplions (2) par quatre pour nous affranchir de la fraction :

3) $20x + 16y + z = 400$

Ensuite, par le principe de « restauration » :

$z = 400 - 20x - 16y$

En substituant cette valeur de z dans (1), nous obtenons :

4) $x + y + 400 - 20x - 16y = 100$

Soit en réarrangeant :

$19x + 15y = 300$

Le système se trouve ainsi réduit à une équation à deux inconnues, que nous pouvons résoudre grâce aux autres contraintes. Les seuls nombres entiers positifs qui conviennent se trouvent par tâtonnement : $x = 15$ et $y = 1$. (Notez que 300 est divisible par 5, donc que $19x + 15y$ est divisible par 5. Et comme $15y$ est divisible par 5, $19x$ doit être aussi divisible par 5, donc x doit être multiple de 5. Les seules valeurs possibles sont donc $x = 5$, 10 ou 15. Les deux premières n'aboutissent pas à une solution.) Donc :

$$z = 100 - x - y = 100 - 16 = 84$$

Conclusion : 15 coqs, 1 poule et 84 poussins.

Dans son traité, Abu Kamil précisait que, selon les prix respectifs des trois volailles, le problème comptait tantôt une unique solution, comme ici, tantôt aucune ou plusieurs. À titre d'exemple, il considérait le problème suivant.

52

Cent volatiles

Des canards, des pigeons et des poulets coûtent respectivement 2 dirhams l'unité, 1 dirham les deux et 1 dirham les trois. Combien de canards, de pigeons et de poulets emporterez-vous en achetant cent volatiles pour 100 dirhams ?

Non content d'inventer l'algèbre, les savants arabes adoptèrent le système numérique indien à dix chiffres, comprenant le zéro. Ces chiffres « arabes » – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0 – atteignirent l'Europe vers le XIIIe siècle. Léonard de Pise, dans son livre intitulé *Liber Abaci*, compte parmi les premiers à en faire usage. Entre diverses leçons sur le calcul et la mesure, il propose des casse-tête arithmétiques dont quelques-uns sur des problèmes d'oiseaux, comme celui-ci très joli qui admet une unique solution : acheter trente volatiles pour 30 deniers, parmi des perdrix à 3 deniers, des pigeons à 2 deniers et des moineaux à un demi-denier. (Je vous laisse le résoudre.)

Durant les trois siècles qui suivirent, pratiquement tous les grands mathématiciens de la Renaissance proposèrent leurs propres problèmes d'oiseaux, où il était question d'acheter à bon prix grives, alouettes, merles, passereaux, étourneaux, chapons ou oies, entre autres nombreux amis à plumes. Outre le plaisir récréatif qu'ils procurent, ces casse-tête dresseraient presque une histoire culturelle de l'ornithologie (si ce n'est de la gastronomie) en Europe du Sud !

Résoudre un problème de volatiles, c'est les solutionner tous : il suffit de transcrire l'énoncé sous forme de système d'équations et d'en trouver les solutions entières.

De nombreux autres casse-tête s'abordent de la même façon. Généralement, les équations souffrent d'un surcroît d'inconnues, de sorte que leur résolution demande de tâtonner avec sagacité ou de faire usage d'un certain bagage mathématique. Le problème qui suit est mon préféré toutes époques confondues, notamment parce qu'il fait preuve d'une avarice crasse en informations (il propose seulement deux équations pour *quatre* variables). Et j'aime ça !

53

Ouvert de sept à onze

Un client achète quatre articles au 7-Eleven du coin (une supérette qui doit son nom aux heures d'ouverture des premiers magasins de l'enseigne).

« Tiens, ça fait 7,11 livres, remarque le caissier.

— Comme c'est amusant», répond le client.

— N'est-ce pas ? Et cela en multipliant les prix de chaque article !

— Mais… N'êtes-vous pas censé les additionner ?

— Si. Mais il se trouve que la somme donne exactement le même résultat. »

Quel est le prix de chaque article ?

La résolution de ce problème suppose deux prérequis mathématiques. D'abord, savoir qu'un nombre premier est un nombre entier seulement divisible par lui-même et 1. Leur liste débute ainsi : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,…

Il faut ensuite connaître le théorème fondamental de l'arithmétique, la règle la plus basique et la plus importante sur les nombres premiers, qui assure que tout nombre entier

peut s'écrire comme multiplication d'un unique ensemble de nombres premiers. Par exemple :

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$711 = 3 \times 3 \times 79$

$123\,456 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 643$

Dans tous les cas, le nombre se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers. Peut-être connaissiez-vous cette règle tout en ignorant son nom ?

Le théorème fondamental de l'arithmétique vous aidera à composer l'une des équations nécessaires à la résolution de ce problème.

Il est possible que vous ayez besoin d'une calculette ou d'un ordinateur pour décomposer des grands nombres en produit de facteurs premiers. Le casse-tête reste tout de même fantastique.

Quel est le point commun entre le grand mathématicien Siméon Denis Poisson et Bruce Willis, l'acteur hollywoodien de films d'action ? Ils ont tous deux résolu le problème qui va suivre. En fait, selon le biographe de Poisson, le jeune Français lui doit sa vocation mathématique :

« En y pensant à chaque instant, sans aucune connaissance des notations ou des méthodes algébriques, sans jamais avoir suivi de cours élémentaires, il le résolut de lui-même. À partir de ce jour, il sentit poindre en lui cet amour des mathématiques qui ne l'a plus quitté depuis et qui fut à l'origine de sa gloire. »

Pour Bruce Willis, il s'agit aussi d'une manière de s'affirmer. Dans *Die Hard : Une journée en enfer*, Samuel L. Jackson et lui doivent le résoudre afin de désactiver une bombe à retardement. S'ils peuvent le faire, vous aussi !

54

Les trois cruches

Une cruche contient 8 litres de vin. Vous disposez également d'une cruche de 5 litres et d'une autre de 3 litres. Aucun récipient ne porte de graduations.

Comment verser exactement 4 litres dans l'une des cruches ?

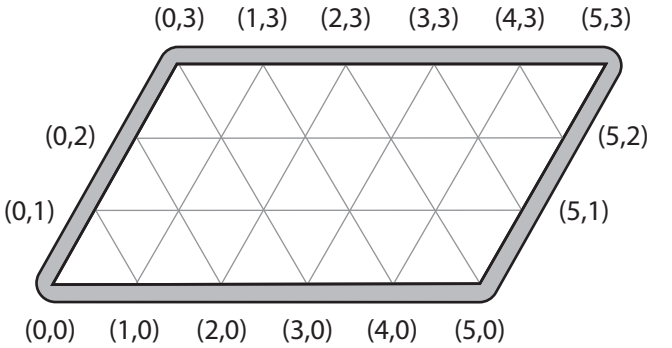
La première occurrence de ce casse-tête remonte au XIIIe siècle, dans une chronique du monde rédigée par Albert, abbé à Stade, près de Hambourg. Son ouvrage, dans lequel il offre une description détaillée des voies empruntées par les pèlerins du Nord de l'Europe pour se rendre à Rome, se présente comme un dialogue entre deux moines, Tirri et Firri. Leurs joyeuses badineries comprennent plusieurs casse-tête mathématiques, dont celui des trois cruches, que Tirri soumet à Firri en disant : « Partage le vin… Ou pars à jeun ! »

Ce casse-tête est vraiment amusant à résoudre. Je vous laisse d'abord vous dépatouiller avec la méthode classique, c'est-à-dire en jonglant avec le remplissage des cruches, et voir le résultat. Allez-y avant de poursuivre la lecture.

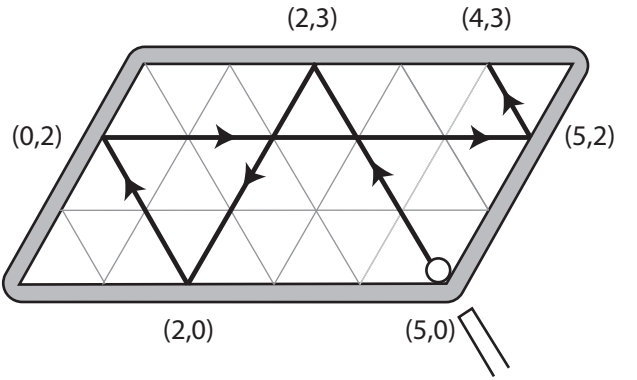
Venons-en maintenant à l'autre façon de résoudre le problème des trois cruches : faire rebondir des boules de billard sur une table pour le moins non conventionnelle !

La table de billard page suivante est un losange de cinq unités sur trois unités, composé de triangles équilatéraux, qui déterminent un système de coordonnées. Un point est représenté par le couple (x, y), où x est compté sur l'axe horizontal et y sur l'axe diagonal.

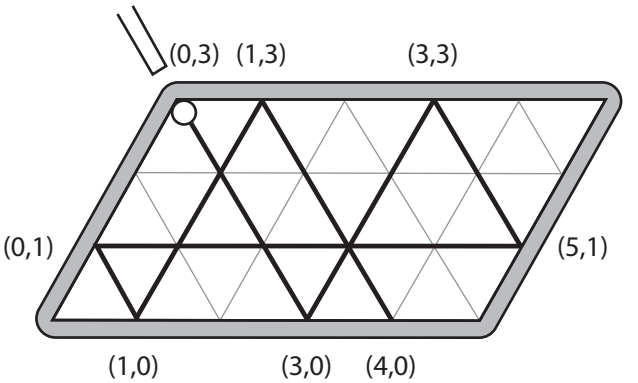
En bas, l'illustration schématise la trajectoire d'une boule initialement posée en (5, 0) et frappée dans l'axe des



triangles. Elle rebondit aux points (2, 3), (2, 0), (0, 2), (5, 2), (4, 3) et ainsi de suite. (En mathématiques, les billards sont idéalisés : les boules roulent sans frottement et rebondissent toujours de la manière attendue.)



Considérons maintenant la trajectoire d'une boule positionnée en (0, 3). Elle rebondit aux points (3,0), (3, 3), (5, 1), (0, 1), (1, 0), (1, 3) et (4, 0), puis poursuit sa route.



Regardons ces deux séries de coordonnées d'un peu plus près :

Coup 1	Coup 2
(5, 0)	(0, 3)
(2, 3)	(3, 0)
(2, 0)	(3, 3)
(0, 2)	(5, 1)
(5, 2)	(0, 1)
(4, 3)	(1, 0)
	(1, 3)
	(4, 0)

Ces nombres vous rappellent-ils quelque chose ? Je l'espère bien ! Car il s'agit précisément des deux solutions possibles pour le problème des trois cruches.

Pour limiter le risque de confusion, notons A la cruche de 5 litres et B celle de 3 litres.

A et B sont vides au départ.

Remplissons A. L'état des cruches se caractérise alors par A = 5 litres et B = 0 litre, ce que nous notons par (5, 0).

Remplissons maintenant B avec A. Il reste 2 litres dans A et B contient 3 litres. État des cruches : (2, 3).

Vidons B dans la troisième cruche. État des cruches : (2, 0).

Vidons A dans B : (0, 2)
Remplissons A de nouveau : (5, 2)
Versons A dans B : (4, 3)
Terminé ! La cruche A contient 4 litres.

Les volumes de vin dans A et B correspondent exactement aux coordonnées des rebonds d'une boule frappée en position (5, 0).

Si nous avions commencé le casse-tête par le remplissage de B, les volumes A et B auraient été décrits par les rebonds de la boule frappée en position (0, 3).

Cette étonnante façon de résoudre le problème des trois cruches fut découverte en 1939 par le statisticien britannique Maurice C.K. Tweedie, alors âgé de 20 ans. Chaque rebond supplémentaire d'une boule de billard sur une table en forme de losange constitue un pas de plus vers la solution.

Si la destinée vous plaçait un jour en situation de devoir transvaser un volume spécifique d'un contenant plein dans deux autres, vides, plus petits, de volume X et Y, il vous suffirait de construire une table de billard en forme de losange X par Y, puis de frapper quelques boules. Bruce Willis et Samuel L. Jackson, prenez-en de la graine !

55

Les deux seaux

Vous êtes au bord d'une rivière avec un seau de 7 litres et un autre de 5 litres.

Comment mesurer 6 litres en un minimum de transvasements ?

Les transvasements de liquides entre récipients donnent naissance à d'autres questions follement amusantes.

56

Le café au lait

Une cafetière contient du café noir. Un bol contient du lait. Vous versez du café dans le lait, puis reversez une partie du café au lait dans la cafetière de façon à retrouver les niveaux de liquide de départ dans les deux récipients.

Y a-t-il plus de café dans le bol que de lait dans la cafetière ?

Mais le petit déjeuner n'est pas le seul repas de la journée…

57

Eau et vin

Deux carafes contiennent respectivement une pinte d'eau et une pinte de vin. Versez une demi-pinte d'eau dans le vin. Remuez. La carafe de vin contient maintenant une pinte et demie d'un mélange eau-vin. Versez une demi-pinte de ce mélange de nouveau dans la carafe d'eau. Les deux carafes contiennent toutes deux une pinte de liquide. Remuez. Continuez ainsi à transvaser des demi-pintes entre les deux carafes.

Après combien de transvasements les deux carafes contiendront-elles un pourcentage égal de vin ?

À l'instar d'un liquide, le sable se laisse aussi verser. Voici un casse-tête de transvasements où il s'agit de mesurer le temps plutôt que des volumes.

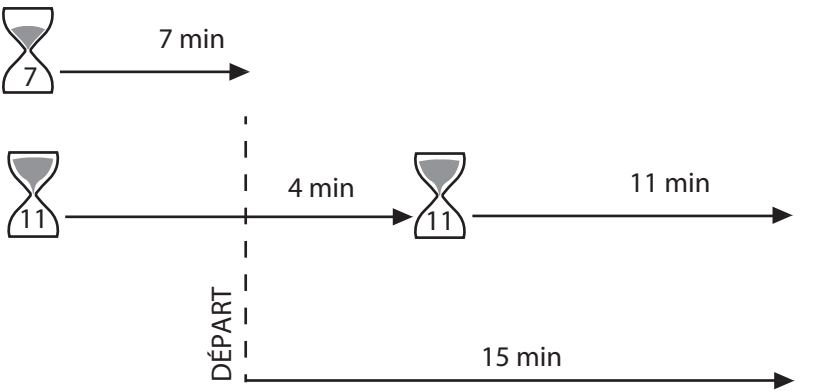
58

Le quart d'heure de célébrité

Comment mesurer exactement un quart d'heure avec un sablier de 7 minutes et un sablier de 11 minutes ?

Je vous mets sur la voie… Nous disposons donc de deux sabliers. Il faut commencer par les retourner tous les deux. En effet, si nous n'en retournions qu'un, nous ne pourrions mesurer que 11 ou 7 minutes et nous nous retrouverions à notre point de départ.

Pendant que le sable s'écoule, consacrons un bref instant à regarder attentivement les nombres. Les sabliers mesurent 7 et 11 minutes alors qu'il nous faut mesurer 15 minutes. Les sabliers diffèrent de 4 minutes, soit précisément l'écart entre 11 minutes et 15 minutes. Tout cela suggère la stratégie illustrée ci-dessous.



Quand tombent les derniers grains du sablier de 7 minutes, nous savons qu'il reste 4 minutes au sablier de 11 minutes. Précisément l'intervalle dont nous avons besoin. Commençons donc ici à mesurer notre période de

15 minutes. Une fois le sablier de 11 minutes vide, 4 minutes plus tard, retournons-le immédiatement. Une fois de nouveau vide, 11 minutes plus tard, nous avons exactement mesuré exactement le laps de temps de 15 minutes.

Cette solution, qui demande en tout 22 minutes pour mesurer un quart d'heure, ne paraît pas optimale. Saurez-vous en trouver une plus rapide en exploitant les sabliers de façon plus astucieuse ?

Passons à une autre méthode ancestrale pour mesurer le temps : les mèches.

59

Les chronomèches

Vous disposez de mèches qui brûlent chacune en une heure, avec toutefois l'inconvénient de se consumer inégalement : une partie peut brûler plus rapidement qu'une autre. Ainsi, rien n'assure qu'une mèche coupée en son milieu brûlera en deux fois une demi-heure.

1) Mesurez 45 minutes avec deux mèches.

2) Mesurez aussi précisément que possible 20 minutes avec une seule mèche.

Résolvez cette énigme et vous vous rendrez compte que grâce aux mathématiques, vous pourrez ignorer le problème posé par l'imperfection des mèches. J'aime cette façon dont les mathématiques se jouent des aléas du monde physique.

Voici un autre casse-tête sur l'art et la manière de passer outre des imperfections matérielles.

60

La pièce biaisée

La probabilité de tirer pile ou face avec une pièce parfaite est d'une chance sur deux, soit 50/50. Imaginons qu'une imperfection de la pièce porte cette probabilité à un autre rapport, toujours le même à chaque lancer. Est-il possible de simuler le comportement d'une pièce idéale avec cette pièce biaisée ? C'est-à-dire de trouver une combinaison de lancers de la pièce biaisée qui produise un résultat de 50/50.

Les pièces étant incontournables dans l'univers des casse-tête, nous y reviendrons en détail au chapitre suivant.

Les pesées se sont longtemps effectuées sur des balances à deux plateaux, avant que ces dernières ne soient progressivement détrônées par des modèles mono-plateau à ressorts, inventés au XVIIIe siècle. Outils de mesure omniprésents, les balances à plateaux ont constitué, entre la Renaissance et les Lumières, et bien au-delà, une source évidente de casse-tête mathématiques.

Ne vous emmêlez pas les plateaux avec celui-ci !

61

Deux tas de farine

À l'aide d'une balance à plateaux et de deux poids respectifs de 10 g et 40 g, divisez 1 kg de farine en deux tas respectifs de 200 g et 800 g en seulement trois pesées.

Supposons que nous disposions de six poids dont la valeur en kilogrammes va croissant en doublant à chaque fois :

1, 2, 4, 8, 16, 32

Ces poids peuvent se combiner pour donner n'importe quel poids rond compris entre 1 et 63. Ainsi :

3 = 2 + 1 (c'est-à-dire qu'un poids de 3 kg s'obtient en ajoutant le poids de 2 kg à celui de 1 kg)

13 = 8 + 4 + 1

27 = 16 + 8 + 2 + 1

63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

En fait, les six poids ci-dessus constituent *le plus petit ensemble de poids* capable de former tout poids entier compris entre 1 et 63 kg.

Nous pouvons comprendre pourquoi en traduisant les poids en nombres binaires. Les nombres binaires sont le système numérique qui n'utilise que les chiffres 0 et 1. Les nombres utilisés en binaire sont ceux de notre système décimal où n'apparaissent que des 0 et des 1 : 1, 10, 11, 100, 110, et ainsi de suite. Les nombres binaires 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 correspondent aux nombres décimaux 1, 2, 4, 8, 16 et 32. Vous allez voir comment cette propriété nous permet de comprendre pourquoi n'importe quel poids peut se décomposer – et c'est même la meilleure manière de le faire – avec la série de poids 1, 2, 4, 8, 16, 32…

3 s'écrit 111 en binaire

13 s'écrit 1101 en binaire

27 s'écrit 11011 en binaire

63 s'écrit 111111 en binaire

Un 1 tout à droite est un 1, un 1 un cran moins à droite est un 2, un 1 encore un cran moins à droite est un 4, et ainsi de suite. De même, un 0 tout à droite dénote une absence de 1, un 0 un cran moins à droite dénote une absence de 2, un 0 encore un cran de moins à droite dénote une absence de 4, et ainsi de suite. Prenons 13, qui se représente par 1101 en binaire. De droite à gauche, nous comptons un 1, pas de 2, un 4 et un 8. En d'autres termes,

13 = 1 + 4 + 8, exactement comme nous l'avons vu avec les poids plus haut.

Mais foin de digressions sur les nombres binaires, aussi fascinants soient-ils. Revenons à nos plateaux.

Nous disions donc que l'ensemble de poids {1, 2, 4, 8, 16} permet de peser tout nombre entier de kilogrammes compris entre 1 et 63, en plaçant à cette fin la bonne combinaison de poids sur *un seul* plateau de la balance.

Mais que se passe-t-il si les poids peuvent maintenant être placés sur les deux plateaux ?

62

Le problème des poids de Bachet

Vous disposez d'une balance à deux plateaux. Vous cherchez à peser des objets qui vont de 1 à 40 kg. De combien de poids aurez-vous besoin si les masses peuvent être placées sur l'un ou l'autre des plateaux ? On cherche évidemment à s'embarrasser du moins de poids possible.

Ce problème apparut pour la première fois dans *Liber Abaci*, un livre publié en 1202 par Léonard de Pise, même s'il est plus connu aujourd'hui comme le « problème des poids » du Français Claude-Gaspard Bachet – non, Bachet n'abusait pas de la bonne chère.

À la fois poète, traducteur et mathématicien, Bachet inventa le livre de casse-tête avec la publication en 1612 de la première édition de ses *Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres*. Il y proposait de nombreux problèmes que nous avons déjà rencontrés dans ce livre, comme celui de la traversée d'une rivière dans un bateau trop petit, de l'achat d'une centaine de volatiles ou des transvasements entre trois cruches. Les *Problèmes plaisans* incarnèrent

durant trois siècles le standard des mathématiques récréatives. La littérature ultérieure sur le sujet lui doit beaucoup. L'ouvrage de Bachet présente aussi la plus célèbre des études sur les problèmes de balances à plateaux.

Bachet joua un autre rôle crucial dans l'histoire des mathématiques par sa traduction du grec au latin d'*Arithmétiques*, de Diophante. C'est en effet sur une page de ce livre que Pierre de Fermat, le célèbre mathématicien français, écrivit sa célèbre phrase :

> *« J'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir. »*

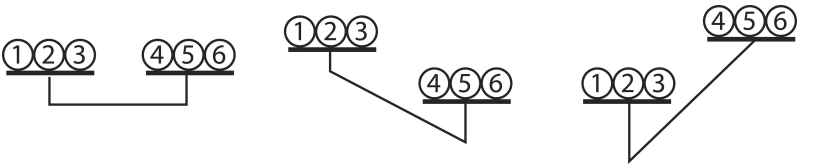
Fermat évoquait un résultat qui lui avait été inspiré par le traité et qui deviendrait plus tard le « dernier théorème de Fermat » – il assure qu'aucuns nombres entiers a, b et c ne vérifient l'équation $a^n + b^n = c^n$ dès que n est plus grand que 2. Or cet énoncé attendit sa démonstration pendant plus de trois cent cinquante ans ! Entre-temps, il avait acquis le statut de problème non résolu le plus célèbre des mathématiques.

Un casse-tête préliminaire :

> *Vous disposez de huit pièces identiques. Une neuvième pièce est contrefaite : visuellement, c'est une copie conforme des autres, mais elle est en réalité un soupçon plus légère. Comment identifier la contrefaçon en seulement deux pesées ?*

Attention, ne lisez pas ce qui suit si vous souhaitez résoudre ce problème par vous-même. J'indique la solution parce qu'elle nous aidera à résoudre le prochain problème.

Solution : divisons les pièces en trois groupes de trois, puis numérotons-les successivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Plaçons les pièces 1, 2, 3 sur un plateau et 4, 5, 6 sur l'autre. Soit les plateaux s'équilibrent, soit non.



S'il y a équilibre, comme sur le diagramme de gauche, nous savons que la pièce plus légère se trouve parmi celles numérotées 7, 8, 9. En cas de déséquilibre avec le premier plateau plus haut, comme sur le diagramme central, nous savons qu'elle se trouve dans le groupe 1, 2, 3. En cas de déséquilibre avec le premier plateau plus bas, nous savons qu'elle se trouve dans le groupe 4, 5, 6.

Nous avons à ce stade, pour ainsi dire, réduit les chances de choisir la contrefaçon de une sur neuf à une sur trois. Quant à la seconde pesée, il suffit de placer une pièce sur un plateau, une autre sur l'autre et de laisser la troisième de côté. Si les deux plateaux s'équilibrent, la copie est celle laissée de côté ; elle est sinon dans le plateau qui s'élève. Et voilà !

Le casse-tête qui suit implique également une pièce contrefaite et connut son heure de gloire durant la Seconde Guerre mondiale. Il devint si viral et les cerveaux alliés s'arrachaient tellement les cheveux dessus que quelqu'un proposa de larguer la pièce derrière les lignes ennemies, afin de contaminer les Allemands !

63

La pièce contrefaite

Vous disposez de onze pièces identiques. Une douzième pièce est contrefaite : même si elle est d'apparence semblable, son poids est en réalité un tantinet différent des autres. Mais vous ne savez pas dans quel sens.

Comment identifier la contrefaçon en trois pesées et savoir si elle est plus légère ou plus lourde ?

Les balances à un seul plateau, comme celles à affichage numérique qui équipent aujourd'hui nos cuisines, donnent aussi naissance à de jolis casse-tête de monnaie contrefaite.

64

La fausse pile

Vous disposez de dix piles de dix pièces de 1 euro. Neuf de ces piles sont constituées de vraies pièces de 1 euro, l'autre uniquement de fausses. Vous connaissez le poids d'une vraie pièce de 1 euro et savez qu'une fausse pèse 1 g de plus. Quel est le nombre minimal de pesées requis pour identifier la fausse pile à l'aide d'une balance de cuisine moderne ?

Édouard Lucas, par la publication de ses volumes de *Récréations mathématiques*, à la fin du XIXe siècle, se posa en digne successeur de Claude-Gaspard Bachet. Mathématicien professionnel, il a contribué de manière significative à une meilleure compréhension des nombres premiers. Il inventa de nouveaux casse-tête tout en revisitant les classiques.

Une anecdote *absolument authentique*, pour reprendre les termes d'un manuel de mathématiques de 1915 qui la rapporte, se situe bien des années auparavant, lors d'un congrès scientifique. À la fin d'un déjeuner où se trouvaient réunis plusieurs mathématiciens connus, voire illustres, Lucas proposa au débotté le casse-tête qui suit. Quelques auditeurs répondirent étourdiment, la plupart gardèrent le silence, et pas un ne donna la solution juste ! À vous de jouer, ami lecteur !

65
Du Havre à New York

Chaque jour à midi, un paquebot quitte Le Havre pour New York à l'instant exact où, de l'autre côté de l'Atlantique, un bateau part de New York pour Le Havre.

La traversée se fait exactement en sept jours, soit dans un sens, soit dans l'autre. Combien le paquebot partant du Havre croisera-t-il d'autres navires en sens inverse sur son trajet ?

J'apprécie particulièrement ce casse-tête car il transforme quelque chose de banal – le trafic maritime – en une gourmandise mathématique. De manière plus générale, les transports ont inspiré nombre de grands casse-tête, souvent fondés sur des idées qui viennent durant un voyage.

66
Le vol aller-retour

Un avion va du point A au point B et revient. Si le vent ne souffle pas, le vol dure exactement le même temps dans les deux sens. Mais dans le cas contraire ? Le vol aller-retour prend-il plus de temps, moins de temps, le même temps ou la question dépend-elle du sens du vent ?

Nous pouvons supposer que le vent souffle dans le même sens pendant tout le trajet. Car un vent dans le dos à l'aller, suivi d'un vent dans le dos au retour, dû à un soudain changement de sens du vent quand l'avion arrive en B, rendra clairement l'aller-retour plus rapide que sans vent. Et nous pouvons supposer de même que l'avion vole en ligne droite de A à B et de B à A.

Commencez par réfléchir à ce qui se passe quand l'avion vole vent dans le dos à l'aller, ce qui raccourcit cette partie du voyage, et revient face au vent, ce qui rallonge cette seconde partie. En tout, l'effet du vent s'annule-t-il ou pas ? Poursuivez en considérant que le sens du vent fait un certain angle avec la trajectoire de l'avion.

Enfant, il m'arrivait lors d'un long trajet en voiture de fixer les chiffres du compteur kilométrique qui défilaient. J'étais comme hypnotisé par le tableau de bord. Ce souvenir me revient chaque fois que je me penche sur un problème comme celui qui suit…

67

Les deux compteurs

Les voitures modernes sont en général équipées de deux compteurs kilométriques : l'un qui totalise la distance parcourue depuis la mise en service du véhicule, l'autre, dit « journalier », qui enregistre la distance parcourue lors d'un trajet.

Supposons, oh coïncidence !, que les quatre premiers chiffres des deux compteurs soient identiques, comme sur l'illustration page suivante.

Si on ne réinitialise pas le compteur journalier, quel kilométrage affichera le premier compteur lorsque les quatre premiers chiffres des deux compteurs seront de nouveau identiques ?

Considérons maintenant que votre moteur soit vos muscles.

68

Le dépassement

[1] Lors d'un marathon, vous doublez le coureur en deuxième position. À quelle place êtes-vous ?

[2] Lors d'un marathon, vous doublez le coureur en dernière position. À quelle place êtes-vous ?

69

Stratégies de course

Constance et Daphné courent un marathon, soit exactement 26,2 miles. Constance court à la vitesse constante de 8 minutes par mile d'un bout à l'autre. Daphné alterne pointes de vitesse et ralentissements tout en parcourant chaque mile en 8 minutes et une seconde.

En d'autres termes, quel que soit le mile considéré, le premier, le deuxième ou disons l'intervalle entre 13,6 et 14,6 miles, Constance le parcourra en 8 minutes tandis que Daphné aura 1 seconde de retard sur elle.

Daphné peut-elle gagner la course ?

Sans vouloir trop vous aider, le fait est que c'est possible. Tout le problème consiste à trouver la bonne approche. Il s'agit selon moi plus d'un paradoxe que d'un casse-tête à proprement parler. Non pas de ces paradoxes logiques, fondés sur des prémisses qui aboutissent à des conclusions autocontradictoires, mais de ceux plus malicieux affirmant une vérité apparemment absurde qui se révèle pourtant juste à l'examen. Voici deux casse-tête dans cette veine.

70

Les pommes de terre desséchées

Un tas de 100 kg de pommes de terre est exposé au soleil. Les pommes de terre sont constituées à 99 % d'eau. Un jour plus tard, l'évaporation aidant, l'eau n'entre plus dans leur composition que pour 98 % de leur poids. Combien pèse alors le tas de pommes de terre ?

Le problème qui suit est un classique proposé en 1896 par W. W. Rouse Ball dans ses *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*, le premier ouvrage anglophone d'importance dédié aux amusements mathématiques. Le livre connut quatorze éditions originales, la première en 1892, les quatre dernières, posthumes, en 1939, 1942, 1974 et 1987, avec des révisions et des augmentations de H. S. M Coxeter, un grand géomètre canadien. Universitaire à Cambridge, Rouse Ball, entre autres occupations, fonda le Pentacle Club, l'une des plus anciennes sociétés de magie. Il légua une partie de sa fortune aux universités d'Oxford et de Cambridge, qui toutes deux créèrent une chaire de mathématiques à son nom.

71

La bonne paye

Vous êtes embauché à un salaire de départ de 10 000 euros par an. Votre patron vous propose deux façons de vous augmenter :

1) Formule A. Une augmentation de 500 euros tous les six mois ;

2) Formule B. Une augmentation de 2 000 euros tous les ans.

Quelle formule choisissez-vous ?

72

La courte paille

Si une paille est coupée en deux au hasard, quelle est en moyenne la longueur du plus petit morceau ?

L'un des plus célèbres casse-tête formulés par Édouard Lucas s'intitule *Problème des ménages*. Il s'agit de déterminer le nombre de manières différentes qu'ont des couples mari/femme de s'asseoir autour d'une table de façon à alterner hommes et femmes sans qu'aucun conjoint ne se trouve côte à côte. Original, non ?

La solution dépasse nettement le niveau de ce livre, ce qui explique d'ailleurs que Lucas l'ait proposé en appendice à l'un de ces traités universitaires sur la théorie des nombres plutôt que dans ses *Récréations mathématiques*. Mais, puisque vous me le demandez, je vous dirais que le problème est impossible avec deux couples, qu'il existe 12 arrangements possibles avec trois couples, 96 avec quatre, et 3 120 avec cinq.

L'idée qu'un dîner puisse faire l'objet d'un casse-tête en a inspiré plusieurs.

73

Poignées de main

Edward et Lucy invitent quatre couples à dîner. Chaque personne salue d'une poignée de main les personnes qu'elle ne connaît pas, et seulement celles-ci. Quand Edward demande à sa femme et aux huit invités combien de mains ils ont serrées, il reçoit neuf réponses différentes.

Combien de mains Lucy a-t-elle serrées ?

Le dîner vous a semblé un peu guindé ? En voici un plus décontracté…

74

Poignées de main et embrassades

Edward et Lucy invitent des amis à dîner. Certains sont célibataires, d'autres en couple avec un partenaire de sexe opposé. Les hommes se saluent d'une poignée de main, les femmes saluent en embrassant hommes ou femmes.

Chaque invité salue à la fois Edward, Lucy et tous les autres invités sauf son éventuel partenaire. Avec 6 poignées de main et 12 embrassades au total, combien de personnes ont-elles participé au dîner et combien de célibataires comptait-il ?

Les casse-tête de dîner traitent de combinatoire. Si jamais vous êtes effrayé par le nombre apparemment trop grand de combinaisons, ne vous découragez pas. L'astuce consiste justement à ne pas les compter directement. Et quand vous allez au théâtre, n'oubliez surtout pas votre billet.

75

Le billet perdu

Dans un théâtre, la grande salle est encore silencieuse et ses cent sièges tous vacants. L'heure tournant, la porte d'entrée voit défiler un par un les spectateurs qui gagnent leur place réservée. Ayant égaré son billet, le premier s'assoit au hasard. Chaque spectateur restant s'assoit à sa place désignée, sauf si celle-ci est déjà occupée, auquel cas il s'assoit à une place vacante au hasard.

Quelle est la probabilité que la dernière personne occupe le siège qui lui avait été attribué ?

Ce chapitre présentait des casse-tête sur des situations hypothétiques. Et si nous nous frottions maintenant à la réalité ?

PROBLÈMES AVEC ACCESSOIRES

Savez-vous planter des arbres ?

En guise d'apéritif

Êes-vous un génie en géographie ?

1) Quelle est la plus grande ville d'Europe dont le nom (en français) ne contient qu'une syllabe ?

2) Quel est l'État des États-Unis le plus proche de l'Afrique ?

Floride
Caroline du Nord
New York
Massachusetts
Maine

3) Classez les villes suivantes d'ouest en est :

Albi
Bordeaux
Calais
Rennes
Toulouse

4) Classez les villes suivantes du nord au sud :

Alger
Halifax (Nouvelle-Écosse)
Paris
Seattle
Tokyo

5) Classez les villes suivantes du nord au sud :

Buenos Aires
Le Cap
Île de Pâques
Montevideo
Perth (Australie)

6) Quel pays européen présente une frontière commune avec le plus de voisins européens ?

7) Classez les îles suivantes par ordre de population croissante :

Île de Ré
Île de Noirmoutier
Île d'Ouessant
Île d'Oléron
Île d'Yeu

8) Quel pays a la ligne de côte la plus étendue au monde ?

9) La France compte le plus grand nombre de fuseaux horaires au monde (douze), en raison de ses départements et territoires d'outre-mer. Mais quel est le plus vaste pays au monde qui n'en compte qu'un ?

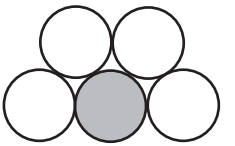
10) Les plus hauts sommets d'Amérique du Sud, d'Europe, d'Afrique, et d'Amérique du Nord sont respectivement l'Aconcagua, l'Elbrouz, le Kilimandjaro et le Denali.

Classez-les par ordre d'altitude décroissante.

À mon sens, les casse-tête qui demandent de manipuler des objets physiques comptent parmi les plus captivants. Notre concentration se focalise d'emblée sur le problème. À l'inverse, lorsqu'on réfléchit à un problème abstrait, on est tenté de griffonner des lignes de notes et l'on est vite perdu dans les méandres de ses pensées. De plus, la connexion physique avec l'objet n'est pas sans évoquer le plaisir enfantin procuré par la manipulation de son jouet favori…

Dans ce chapitre, nous allons manier des pièces, des allumettes, des timbres, du papier et de la ficelle, pas moins – le contenu d'un vide-poches ou d'un sac à main, en somme ! Le premier problème nécessite seulement quatre pièces identiques. Préparez-vous : s'il arrivait un jour que nous nous retrouvions côte à côte lors d'un voyage en train, il y a toutes les chances pour que je sorte des pièces et que je vous défie de le réussir.

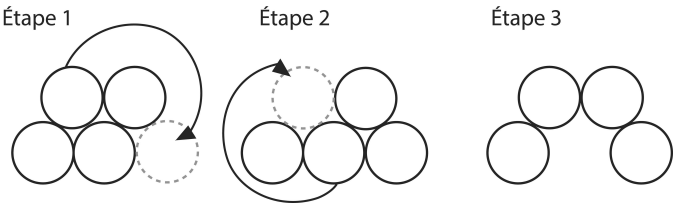
Saurez-vous disposer quatre pièces identiques sur une table comme illustré plus bas, de sorte qu'une cinquième pièce puisse être positionnée sans forcer en position grisée ?



Vous devez déterminer un moyen de positionner les quatre pièces de façon à ce que la cinquième trouve ensuite naturellement sa place parmi elles. Essayez. Attention, il ne s'agit pas de les placer au jugé.

Alors comment contrôler les positions relatives des quatre pièces ? L'unique solution consiste à les disposer en losange, comme illustré sur l'étape 1 plus bas, puis à toujours veiller à ce qu'une pièce en touche toujours deux autres au terme d'un déplacement.

Le problème revient donc à passer de la disposition représentée sur l'étape 1 à la disposition de l'énoncé, avec pour règle d'or que chaque mouvement aboutisse toujours à ce qu'une pièce jouxte deux autres pièces. La solution figure sur les étapes 2 et 3 ci-dessous.



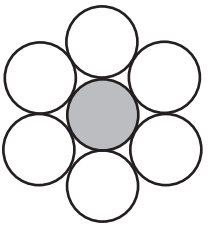
Avec trois fois rien, les casse-tête de pièces offrent de redoutables défis. Ils vous absorbent totalement jusqu'à ce que – pardon pour le jeu de mots – vous ayez décroché le jackpot. Les solutions sont souvent bien plus complexes qu'il n'y paraît au premier abord, même si elles se laissent généralement trouver avec un peu de réflexion.

Le problème présenté ci-dessus a été conçu il y a un siècle par Henry Ernest Dudeney, tout comme le suivant.

76

Les six pièces

Saurez-vous disposer six pièces identiques sur une table comme illustré plus bas, de sorte qu'une septième pièce puisse être positionnée sans forcer en position grisée ?



Là encore, il convient de contrôler les positions relatives des pièces par une disposition initiale adéquate, puis à veiller à ce que chacune touche toujours deux autres au terme de son déplacement. Vous n'avez pas le droit de soulever les pièces ou d'en utiliser une pour pousser les autres.

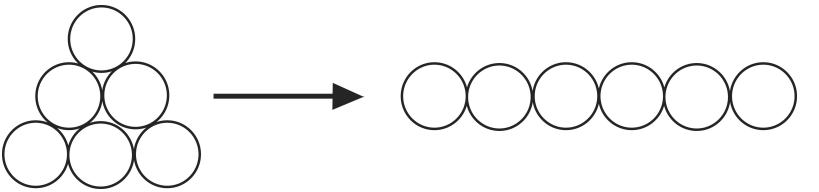
Le casse-tête peut être résolu en trois coups.

Les casse-tête de ce type sont particulièrement addictifs. Une fois venu à bout du précédent, nul doute que vous en redemanderez !

77

Du triangle à la droite

Saurez-vous passer du triangle à la ligne en sept coups (page suivante) ? Comme plus haut, chaque mouvement consiste à glisser une pièce jusqu'à ce qu'elle en touche deux autres. Vous ne pouvez pas soulever une pièce ni vous servir d'une pour pousser les autres.

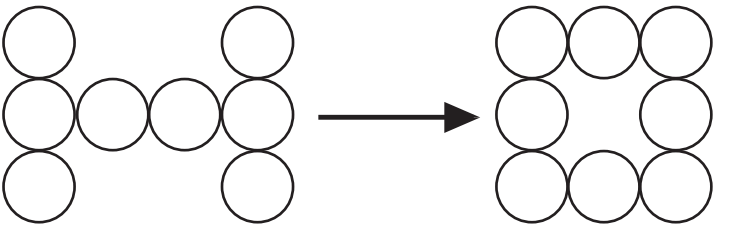


Avec huit pièces maintenant…

78

Histoire d'eau

Saurez-vous passer du H à l'O en quatre coups, avec les règles de déplacement des énoncés précédents ?



Et retourner de l'O à l'H en six coups ?

Nous avons déjà rencontré Henry Ernest Dudeney plus haut dans ce livre, comme concepteur du casse-tête « Smith, Jones et Robinson » qui avait provoqué un boom des problèmes logiques dans les années 1930.

Dudeney fut le plus grand et le plus innovant des créateurs de récréations mathématiques britanniques, si ce n'est du monde. Durant ses quarante ans de carrière, il a conçu pour les journaux et les magazines plus d'énoncés que quiconque. Sa créativité n'a jamais failli. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, le casse-tête de Smith, Jones

et Robinson (Problème 7) parut le mois de sa mort, en 1930 – dans la rubrique, intitulée *Perplexités*, qu'il tenait depuis des lustres dans *Strand Magazine*.

La vocation de Dudeney tient peut-être à son grand-père, berger dans les South Downs du sud de l'Angleterre, qui avait appris les mathématiques et l'astronomie en autodidacte, alors qu'il gardait les moutons. Il devint ensuite instituteur, comme le fera son fils, le père de Dudeney.

Né en 1857, Dudeney n'était quant à lui pas taillé pour l'éducation traditionnelle. Après avoir quitté l'école à l'âge de 13 ans, il devint greffier dans la fonction publique à Londres. S'ennuyant dans sa vie de petit employé, il commença à soumettre des casse-tête à divers journaux nationaux, jusqu'à démissionner pour se consacrer à temps plein à sa digne activité de concepteur d'énigmes.

La production de Dudeney brille autant par sa diversité que par sa profondeur, une qualité rare chez les autodidactes. Il faut dire qu'il était doué d'une agilité arithmétique exceptionnelle. Dans son premier recueil, *The Canterbury Puzzles* (« Les Comptes de Canterbury »), paru en 1907, après avoir remarqué que la somme des cubes de 1 et 2 valait 9 ($1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$), il demandait au lecteur de trouver deux autres nombres vérifiant la même propriété. La réponse est :

$$\frac{41528056497}{348671682660} \text{ et } \frac{676702467503}{348671682660}$$

Précision de Dudeney :

« Un éminent actuaire et un autre correspondant ont pris la peine d'élever ces nombres au cube et ont tous deux trouvé mon résultat correct. »

Un actuaire est un statisticien spécialisé dans les opérations de finance et d'assurance. Mon esprit se perd en conjectures quand j'essaie de deviner comment Dudeney est parvenu à ce résultat avec un crayon et du papier…

Dudeney a conçu de nombreux casse-tête de pièces. Celui qui suit est tiré de ses *Amusements in Mathematics* (« Divertissements mathématiques »), parus en 1917.

79

Les cinq pennies

Voici un casse-tête très difficile à résoudre, en dépit d'un énoncé d'une simplicité enfantine. Chacun sait placer quatre pennies équidistants les uns des autres : il suffit de poser les trois premiers bord à bord en triangle sur la table, puis de couvrir les pièces avec la quatrième disposée au centre – chaque pièce touchant les autres, elles sont à égale distance les unes des autres. Maintenant, essayez d'en faire autant avec cinq pièces… Placez-les de façon que chaque penny touche les autres, et vous trouverez tout à fait autre chose.

Ce casse-tête gagne à se pratiquer, au moins pour un type avec deux mains gauches comme moi, avec les plus grandes pièces que vous puissiez trouver. Dudeney donnait seulement une solution, mais il y en a en fait deux.

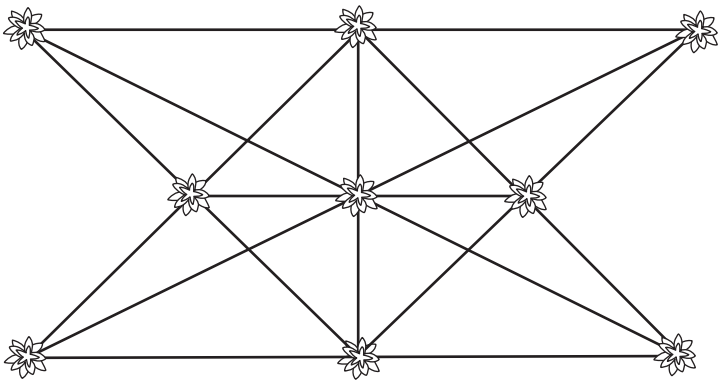
Un ouvrage de John Jackson intitulé *Rational Amusement for Winter Evenings* (« Divertissements rationnels pour soirées d'hiver ») contient les vers suivants :

« Your aid I want, nine trees to plant
In rows just half a score ;
And let there be in each row three.
Solve this : I ask no more. »

« Votre aide appréciée, pour neuf arbres planter
Formant dizaine alignements
Avec trois par trait.
Pour un avis, merci grandement. »

Autrement dit : Comment planter neuf arbres de manière à former dix alignements de trois arbres ?

Voici une solution.



Dans ses *Amusements in Mathematics*, Dudeney précise que ce problème est attribué à Isaac Newton, même si ses premières traces tangibles ne se trouvent que dans l'ouvrage de Jackson. Ce type de casse-tête – où il s'agit de planter des alignements d'arbres – s'aborde plus facilement avec des pièces. Celui qui suit est dû à Dudeney lui-même.

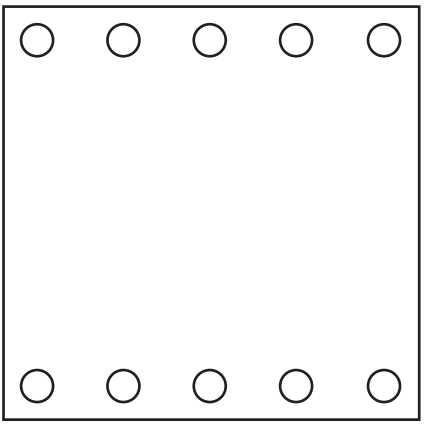
80

Savez-vous planter dix arbres ?

Disposez dix pièces sur une grande feuille de papier comme illustré page suivante.

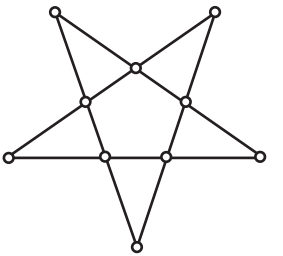
Saurez-vous déplacer quatre pièces sur la feuille de manière à former cinq alignements de quatre pièces ?

Et dans l'affirmative – ce qui devrait être le cas si l'on en croit Dudeney –, saurez-vous déterminer le nombre de solutions possibles, en partant toujours de la même position initiale ?



On peut rapidement s'emmêler les pinceaux si les pièces se décalent un peu : je vous recommande donc de marquer leurs positions initiales au crayon sur le papier.

Dudeney proposa d'autres problèmes consistant à placer dix points, pièces ou arbres de manière à former cinq alignements de quatre. Si vous oubliez dans le problème précédent la règle qui restreint le nombre de pièces à déplacer, par exemple, il existe cinq autres configurations possibles. Dudeney les baptisait « étoile », « dard », « compas », « entonnoir » et « clou » (il appelait la solution du problème précédent les « ciseaux »). L'étoile est représentée ci-dessous. Saurez-vous retrouver les quatre autres ?



ÉTOILE

Et maintenant une devinette : savez-vous pourquoi le plus célèbre des Henry Dudeney du début du XXe siècle était une femme ?

Alice Whiffin avait 18 ans lorsqu'elle épousa Henry Ernest Dudeney. Elle devint plus tard une romancière à succès de la trempe d'un Thomas Hardy et d'une Edith Wharton, et choisit d'écrire sous son nom marital, Mrs Henry Dudeney. On lui doit une cinquantaine de romans, dont beaucoup se situaient en province, dans le sud-est de l'Angleterre. Les Dudeney bâtirent leur propre domaine tout en fréquentant assidument les milieux littéraires londoniens. Alice était intime du très riche et très sociable député sir Philip Sassoon, connu pour les grandes fêtes qu'il organisait dans son manoir du Kent.

La relation entre les Dudeney connut ses hauts et ses bas. Elle prit un amant, si bien qu'ils se séparèrent, puis se rabibochèrent, emménageant de nouveau ensemble, en 1916, à Lewes, dans une maison où ils disposaient chacun d'un bureau, situés l'un au-dessus de l'autre. Alice détailla dans son journal la vie qu'elle menait à Lewes avec Ernest, comme elle appelait son mari. Finalement publié en 1998, ce journal offre un regard affectueusement acide sur l'intimité du plus grand des concepteurs de casse-tête. Dudeney adorait sa femme sans toutefois parvenir à contenir des crises de jalousie folle :

« Ernest a un caractère épouvantable mais il n'y peut rien, n'en a même pas conscience (c'est du moins ce que je crois) et fait toujours amende honorable. Après tout, si vous êtes mariée à un génie – avec l'ambition d'en devenir un vous-même – les affrontements sont inévitables. »

Dudeney possédait cet extraordinaire talent de pouvoir transformer tout objet du quotidien en casse-tête mathématique. Il conçut l'ingénieux problème sur les cigares qui suit

dans son club londonien, avec succès visiblement puisqu'il confessait :

« Il absorba l'attention des membres pendant un temps considérable. Ils ne pouvaient rien en faire et le considéraient impossible à résoudre. Et pourtant, comme je le montrerai, la solution est remarquablement simple. »

Quoique le casse-tête fonctionne avec des cigares, je le crois plus facile à résoudre avec des pièces, de sorte que je l'ai légèrement reformulé. (Il suffit de remplacer chaque occurrence de « pièce » par « cigare » pour retrouver la version originale.)

81

La course à l'espace

Deux joueurs sont assis à une table carrée. Chacun d'eux place tour à tour une pièce sur la table, avec l'obligation de ne pas toucher les pièces déjà posées. Le gagnant est celui qui parvient à placer la dernière pièce, c'est-à-dire à combler le dernier espace libre entre les pièces.

Toutes les pièces sont identiques et, pour que le jeu ne se termine pas au premier tour, évidemment plus petites que la table.

Il s'avère que l'un des joueurs peut gagner à coup sûr. Duquel s'agit-il ? De celui qui commence ou de celui qui joue en second ? Et quelle est sa stratégie ?

Abandonnons Dudeney un instant et profitons des pièces sur la table pour jouer encore un peu avec elles.

Dans son discours inaugural à la Société mathématique d'Édimbourg en 1883, le mathématicien et physicien Peter Guthrie Tait évoqua le casse-tête qui va suivre en précisant l'avoir découvert dans le train. Les jeux de pièces distraient

visiblement les voyageurs depuis les débuts du chemin de fer.

Les contributions de Tait à la science sont aussi nombreuses que variées. En maths, il fonda la théorie des nœuds. En physique, s'il publia de nombreux ouvrages, dont un manuel de référence écrit avec Lord Kelvin, il était surtout très apprécié des étudiants à Édimbourg pour ses fantastiques expériences scientifiques réalisées avec des aimants géants, dans des gerbes d'étincelles qui jaillissaient dans toute la pièce. Son accessoire favori était pourtant sans doute le club de golf. Passionné par ce sport, il rédigea plusieurs articles sur les trajectoires des balles de golf ou autres « projectiles sphériques en rotation ». Il transmit le virus à son fils Freddie qui devint un joueur célèbre et gagna deux fois le championnat britannique amateur.

Ce casse-tête, popularisé en Occident par Tait, semble provenir du Japon.

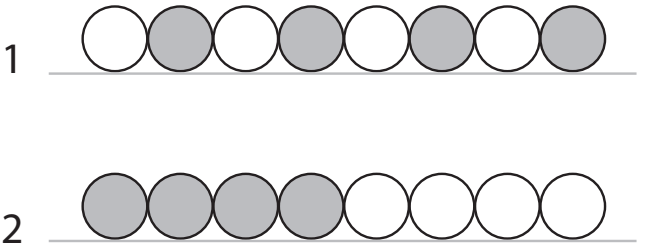
82

La colle de Tait

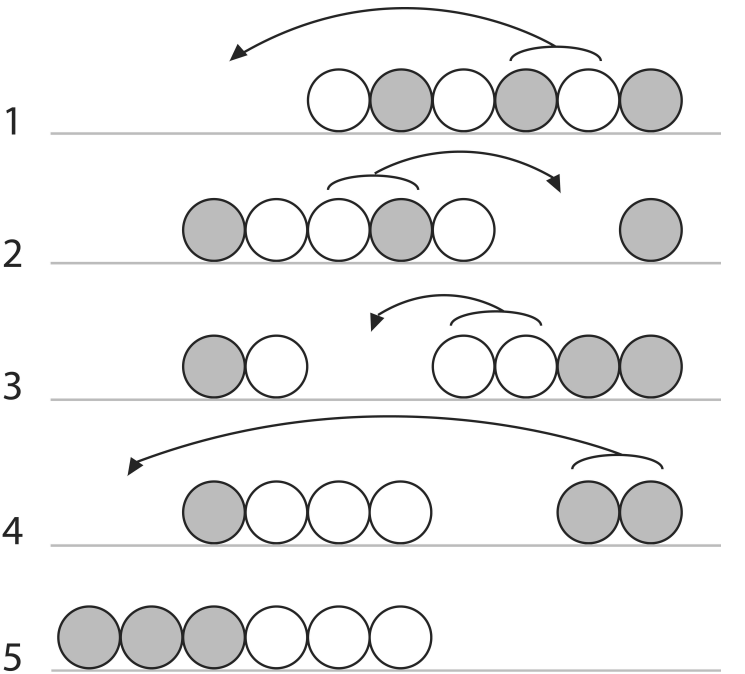
Disposez en alternance deux types de pièces (ou les deux faces d'un même type de pièce) comme illustré page suivante en 1. Le jeu consiste à les déplacer de manière à ce que celles de même type se jouxtent comme illustré en 2.

Il faut impérativement déplacer deux pièces adjacentes en même temps. Vous pouvez les déplacer n'importe où sur la ligne sans toutefois changer leur position mutuelle : celle de gauche reste à gauche et celle de droite à droite.

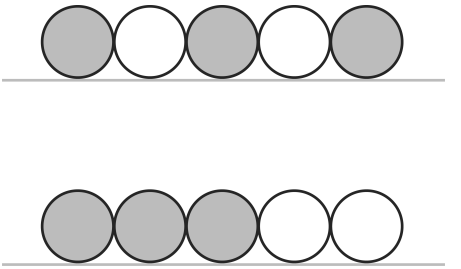
Saurez-vous parvenir à la solution en quatre coups seulement ?



Ne vous laissez pas décourager si la solution tarde un peu à se manifester. Persévérez, ce casse-tête est faisable. Pour vous aider, je vous montre comment résoudre la version plus simple à six pièces. Vous remarquerez que toutes les pièces se trouvent finalement décalées de deux crans vers la gauche.



Pendant que nous y sommes, glissons un dernier problème dans le style de celui de Tait. Celui-là ne demande que cinq pièces, avec toutefois la condition supplémentaire que vous ne pouvez déplacer que deux pièces *de type différent* à chaque coup (ci-dessous). Saurez-vous faire passer les pièces de la position illustrée sur la ligne supérieure à celle du bas en quatre coups ?



Édouard Lucas, le mathématicien français du XIXe siècle que nous avons rencontré au chapitre précédent (celui qui défiait ses collègues avec un problème de paquebots), proposait également dans ses *Récréations mathématiques* les deux casse-tête qui suivent. Ils déconcertent tous deux par leur diabolique simplicité.

83

Les quatre piles

Huit pièces sont alignées comme sur la figure ci-dessous. Elles bougent en sautant : chaque fois que vous déplacez une pièce vers la gauche ou vers la droite, elle bondit par-dessus les deux pièces adjacentes pour se retrouver par-dessus la troisième. Si vous rencontrez un empilement de deux pièces en chemin, c'est bon, vous pouvez aussi sauter par-dessus.

Sauriez-vous déplacer quatre pièces de telle sorte qu'il ne reste à la fin que quatre piles de deux pièces ?

Lucas avait baptisé le casse-tête suivant le *Jeu des grenouilles*. Il le formulait avec des pions blancs et des pions noirs, ce qui n'empêche pas, à défaut d'échiquier ou de damier, de le pratiquer avec des pièces.

84

Grenouilles et crapauds

Trois pièces d'un premier type et trois pièces d'un second type (ou trois pièces du côté face et trois pièces du côté pile) sont alignées et séparées comme sur la figure ci-dessous. Les grenouilles sont à gauche et les crapauds à droite. Les grenouilles ne peuvent se déplacer que de gauche à droite et les crapauds que de droite à gauche.

Une grenouille ou un crapaud peut avancer d'un cran, si cette position est libre, ou sauter par-dessus une unique pièce dans le sens de sa marche, si la position qui suit est libre.

Comment mettre toutes les grenouilles à la place des crapauds et tous les crapauds à la place des grenouilles ?

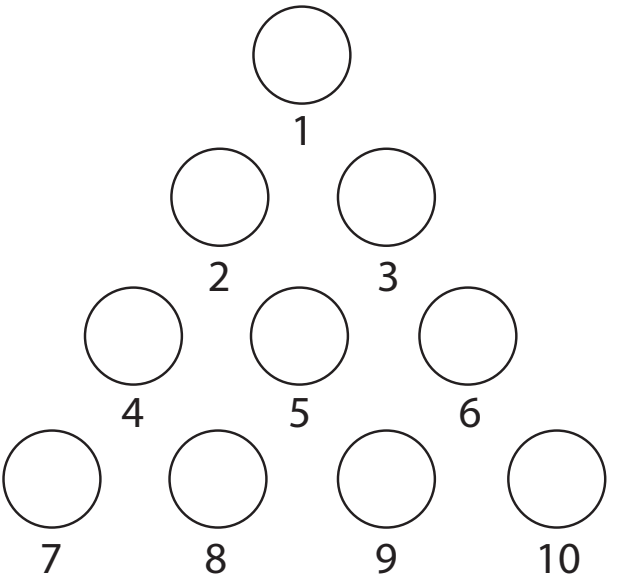
Le solitaire est probablement le jeu le plus célèbre qui se joue en sautant des pièces (ou des pions en l'occurrence). Le savant allemand Gottfried Leibniz, entre autres découvreurs du calcul infinitésimal (indépendamment de Newton), inventeur de machines à calculer et grand promoteur des nombres binaires, écrivait déjà en 1716 : « Le jeu nommé Solitaire m'a plus assez. » Il associait un 1 à la présence d'un pion et un 0 à son absence, tout en préférant jouer à une version inversée du jeu : plutôt que de gagner une place libre en sautant par-dessus un pion qu'on retire ensuite, il sautait par-dessus un espace vide et plaçait un pion dessus. Et il ajoutait : « Mais à quoi bon cela ? dira-t-on. Je réponds : à perfectionner l'art d'inventer. »

Même si nous allons jouer avec des pièces nous respecterons les règles classiques du Solitaire : toute pièce peut sauter par-dessus une pièce adjacente pour atterrir sur une place libre de l'autre côté ; la pièce adjacente est alors retirée du jeu. Et, comme aux dames, il est possible d'enchaîner les sauts si la position d'arrivée en permet un nouveau.

85

Solitaire triangulaire

Disposez dix pièces en triangle comme illustré page suivante. Retirez-en une. Par les règles du Solitaire, réduisez le jeu à une pièce unique.



Ce casse-tête, comme le précédent, ne vous lâchera que lorsque vous l'aurez résolu. Avant de vous lancer, toutefois, et pour ne pas trop vous embrouiller, je vous recommande de disposer les pièces sur des places marquées au crayon sur une feuille de papier.

Si vous ôtez la pièce en position 2, par exemple, et que vous jouez un certain temps, vous découvrirez peut-être la solution en six coups suivante :

1) La pièce en 7 va en 2 (4 est ôté) ;
2) 9 va en 7 (8 est ôté) ;
3) 1 va en 4 (2 est ôté) ;
4) 7 va en 2 (4 est ôté) ;
5) 6 va en 4 puis en 1 puis en 6 (5, 2 et 3 sont ôtées).
6) 10 va en 3 (6 est ôté).

Mais il est possible de faire mieux. En l'occurrence de trouver une solution en cinq coups…

Si j'ai proposé une demi-douzaine de casse-tête à pièces, soit presque la moitié du chapitre, c'est en raison de la

grande polyvalence de ces accessoires : elles glissent, s'empilent comme des jetons, marquent des points géométriques ou servent de pions au solitaire. Et elles présentent deux faces différentes, propriété matérielle exploitée par le problème, ou plutôt le tour de magie, qui suit.

86

Pièces dans le noir

Le magicien que vous êtes a les yeux bandés. Vous demandez à un spectateur de déposer dix pièces sur une table devant vous et de vous dire combien d'entre elles se présentent du côté pile.

Vous ne pouvez pas voir les pièces, ni déterminer leurs faces en les touchant.

Comment scinder les pièces en deux groupes comportant le même nombre de piles ?

Ce tour m'a vraiment impressionné la première fois que je l'ai vu. Et la solution encore plus !

Je vous conseille d'attaquer le casse-tête sans bandeau sur les yeux. Posez dix pièces sur la table de façon à ce que, disons, trois d'entre elles se présentent du côté pile. Essayez alors, comme le problème le demande, de séparer les pièces en deux groupes comptant le même nombre de piles.

Comme il est impossible de diviser les trois pièces en deux, vous voyez immédiatement que pour atteindre la solution, il vous faudra ajouter ou retirer des pièces côté pile (ce que l'énoncé n'interdit pas, remarquez-le), ce qui revient à retourner certaines pièces. La clé de la résolution réside dans le choix de ces pièces à retourner, puis à trouver un moyen de prendre cette décision les yeux bandés.

Le problème des Pièces dans le noir tient du tour de magie par l'effet de surprise très agréable qu'il procure. Les

casse-tête s'apparentent souvent d'ailleurs à des tours de magie. Pas seulement parce qu'ils provoquent lors de la résolution le même genre d'effet waouh que produit un tour, mais parce que leurs énoncés tentent souvent de façon subtile de détourner l'attention du joueur.

J'ai inclus le prochain casse-tête parce qu'il utilise des pièces et qu'il produit un résultat fascinant. Je ne m'attends pas à ce que vous manipuliez cent pièces ; en revanche, je vous recommande vivement d'aller lire la solution quand bien même vous ne parviendriez pas à le résoudre. Il a été posé pour la première fois aux Olympiades internationales d'informatique de 1996, une compétition où s'affrontent des lycéens geeks super-intelligents. C'est un problème magnifique.

87
Les cent pièces

Cent pièces sont alignées sur une table. Penny et Bob jouent un jeu dont le but consiste à amasser la plus grande somme d'argent possible en piochant des pièces une par une. Mais pas n'importe laquelle : seulement celle située à l'extrémité droite de la ligne ou celle à l'extrémité gauche. Les pièces présentent différentes valeurs : 1 penny pour les unes, 2 pence pour d'autres, 1 livre pour d'autres encore, etc.

Penny commence. Elle prend une pièce à l'une des extrémités et l'empoche. Au tour de Bob ensuite. Le jeu se poursuit jusqu'à épuisement des pièces.

Saurez-vous prouver que Penny peut toujours empocher au moins autant d'argent que Bob ?

Vous voulez une astuce ? Numérotez les pièces de 1 à 100.

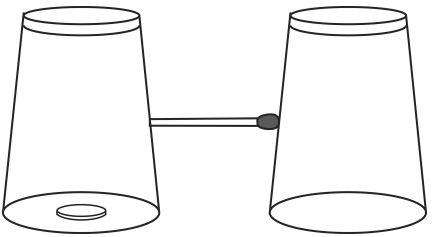
Allez, ça suffit avec les pièces ! Il est maintenant temps d'inviter sur scène le numéro deux des casse-tête à accessoires en termes de popularité : les énigmes à allumettes. Je

vous propose de commencer en douceur avec un énoncé qui associe une pièce *et* une allumette. C'est l'équivalent en mathématiques récréatives d'un duo de deux vieux crooners réunis pour l'anniversaire de leurs cinquante ans de carrière.

88

Libérez la pièce

Deux verres retournés sont positionnés comme illustré ci-dessous. Une allumette est coincée entre les deux et une pièce est enfermée dans celui de gauche. Comment libérer la pièce sans faire tomber l'allumette ?



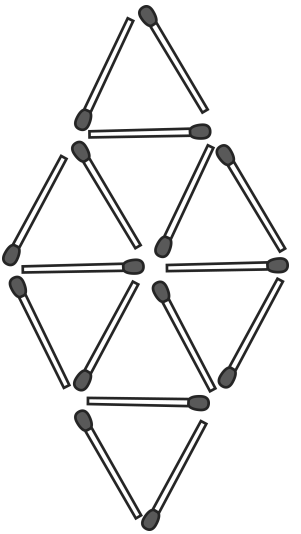
Après son invention au milieu du XIXe siècle, l'allumette de sûreté fit les délices des amateurs des casse-tête, toutes générations confondues, durant une bonne centaine d'années. Avec l'invention du briquet et la baisse du nombre de fumeurs, elles disparaissent peu à peu du quotidien. Si vous n'en avez pas chez vous, les cure-dents, les crayons ou les cotons-tiges font tout aussi bien l'affaire.

Henry Ernest Dudeney décrivait le problème suivant comme « un petit casse-tête pour jeunes lecteurs ».

89

Étagage de triangles

Les seize allumettes ci-dessous forment huit triangles équilatéraux.



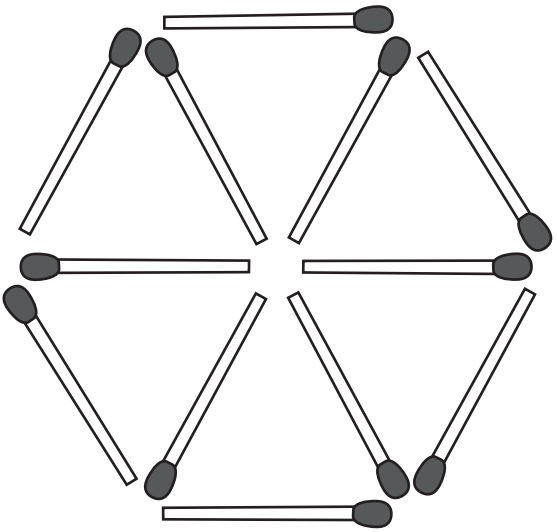
En retirant quatre allumettes, faites apparaître quatre triangles équilatéraux, sans laisser d'extrémités libres ni d'allumettes en réserve.

90

Des triangles, encore des triangles, toujours des triangles

Douze allumettes sont disposées en un hexagone constitué de six triangles équilatéraux.

Le casse-tête se compose de quatre parties :



[1] Déplacez deux allumettes de façon à ne plus former que *cinq* triangles équilatéraux.

[2] Partant de cette nouvelle situation, déplacez deux allumettes de façon à ne plus former que *quatre* triangles équilatéraux.

Il ne faut jamais laisser d'extrémités libres. Dans les deux défis qui suivent, toutefois, les triangles peuvent avoir des tailles différentes.

[3] Déplacez deux allumettes de façon à ne former que *trois* triangles équilatéraux.

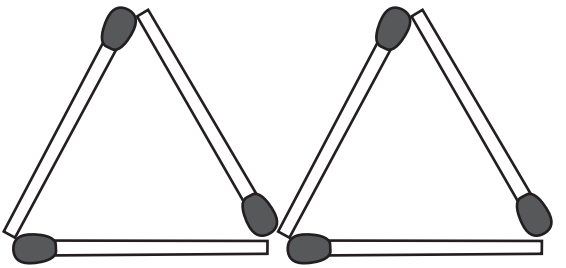
[4] Et déplacez une dernière fois deux allumettes de façon à ce qu'il ne reste que *deux* triangles.

Procédons maintenant en sens inverse en augmentant le nombre de triangles. Le casse-tête qui suit m'excite tout particulièrement tant il confine à l'épure en nombre d'allumettes !

91

Triangles en extension

Voici deux triangles constitués de six allumettes.
[1] Saurez-vous former quatre triangles en déplaçant deux allumettes ? Les allumettes peuvent se chevaucher.



[2] Et saurez-vous former quatre triangles sans chevauchements ?

Plus haut, j'avais demandé de placer cinq pièces de façon à ce que chacune touche toutes les autres. Voici la version du même casse-tête avec des allumettes.

92

À touche-touche

Toujours avec six allumettes, saurez-vous les disposer de façon que chaque allumette touche toutes les autres ?
Sauriez-vous relever le même défi avec sept allumettes ?

Disposer des allumettes en les joignant à leurs extrémités peut être vu de deux façons : comme un simple arrangement d'allumettes, bien sûr, mais aussi comme un réseau de

points liés entre eux par des bâtonnets. Tel est l'esprit du problème suivant.

93

Point à point

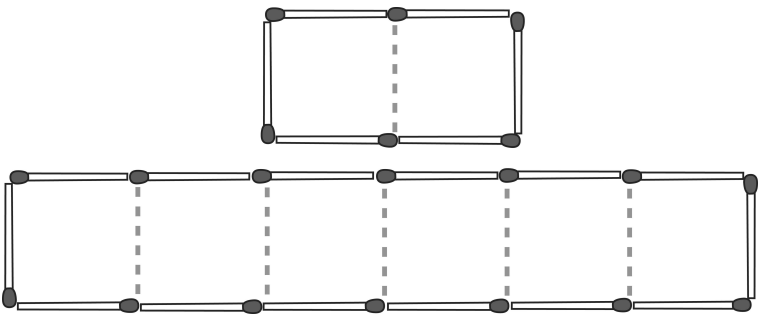
Comment disposer douze allumettes de façon que les deux extrémités de chacune restent toujours en contact avec deux autres allumettes ? En d'autres termes, concevez un réseau de points connectés par des lignes où chaque point est relié à trois autres points.

Et terminons cette série de casse-tête d'allumettes par une variation sur le sujet due à notre cher vieil Henry Ernest Dudeney.

94

Les deux enclos

L'illustration ci-dessous représente deux enclos rectangulaires, respectivement constitués de six et quatorze allumettes. Le second est trois fois plus grand que le premier.



Saurez-vous créer deux nouveaux enclos, respectivement constitués de sept et treize allumettes, de façon que la surface du second soit encore trois fois supérieure à celle du premier ?

En redécouvrant son œuvre, je ne cesse de m'émerveiller de la capacité que possédait Dudeney de produire des casse-tête brillants à partir du genre d'objets qui traînent au fond de vos poches ou dans votre portefeuille. Le casse-tête exceptionnel qui suit requiert une planche de huit timbres. À défaut, vous pouvez couper et plier un morceau de papier. De toute manière, il est temps de vous équiper de ciseaux, nous en aurons bientôt besoin…

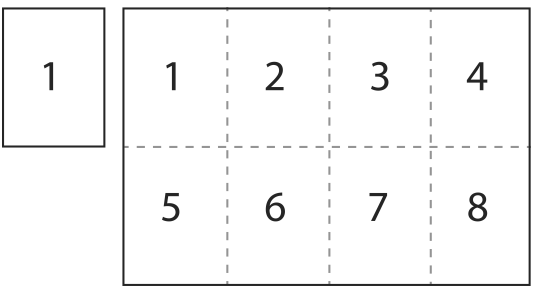
95

Pliage de timbres

L'illustration ci-dessous à droite représente une planche de huit timbres, marqués de 1 à 8. Le but du casse-tête consiste à plier la planche le long de la bordure des timbres de façon à ne laisser apparaître que le timbre 1.

Il y a des façons évidentes d'y parvenir, mais saurez-vous plier la planche de façon à ce que les timbres se trouvent dans l'ordre 1-5-6-4-8-7-3-2 et (plus difficile) 1-3-7-5-6-8-4-2 ?

Dudeney ajoutait : « C'est un casse-tête fascinant. N'abandonnez surtout pas en le jugeant impossible ! »



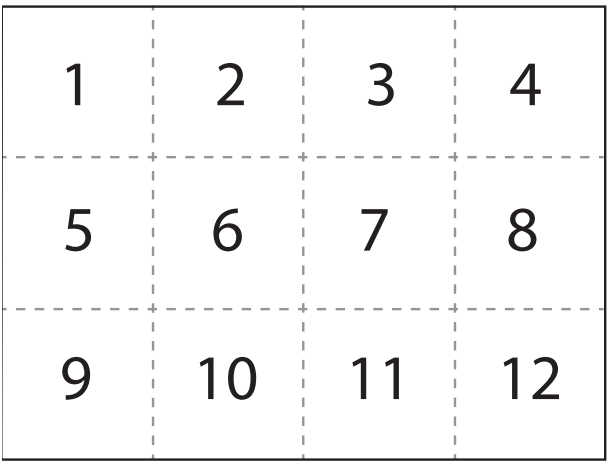
Dudeney proposa aussi cet autre fascinant problème de timbres.

96

Les quatre timbres

Vous disposez d'une planche de 3 × 4 timbres numérotés de 1 à 12 comme illustré ci-dessous. Or un ami vous a prié de lui donner quatre timbres. Vous décidez donc de découper quatre timbres d'un seul tenant, comme 1-2-3-4, 1-2-5-6, 1-2-3-6 ou 1-2-3-7, etc. Les timbres peuvent se toucher par n'importe quel côté, mais pas par un coin seulement.

Combien existe-t-il d'ensembles de quatre timbres connectés ?



Dans la solution de ce casse-tête présentée en fin de livre, j'ai dessiné toutes les formes possibles prises par les quatre timbres connexes. Jetez-y un œil après l'avoir résolu. Elles vous rappellent quelque chose ?

Oui, ce casse-tête de timbres de Henry Ernest Dudeney fait apparaître les formes des pièces du Tetris.

Pour les (très) rares lecteurs qui n'en auraient jamais entendu parler, Tetris est un jeu vidéo aussi simple qu'addictif consistant à empiler des formes géométriques qui tombent du haut de l'écran, en les déplaçant horizontalement ou en les tournant. Ces formes, présentées page 331, sont toutes constituées de quatre petits carrés liés entre eux.

L'inventeur du Tetris, Alekseï Pajitnov, s'inspira pour son jeu du travail de Solomon W. Golomb, un mathématicien qui avait publié en 1965 un livre sur les formes obtenues en connectant des carrés. Et Golomb lui-même avait été inspiré par Dudeney !

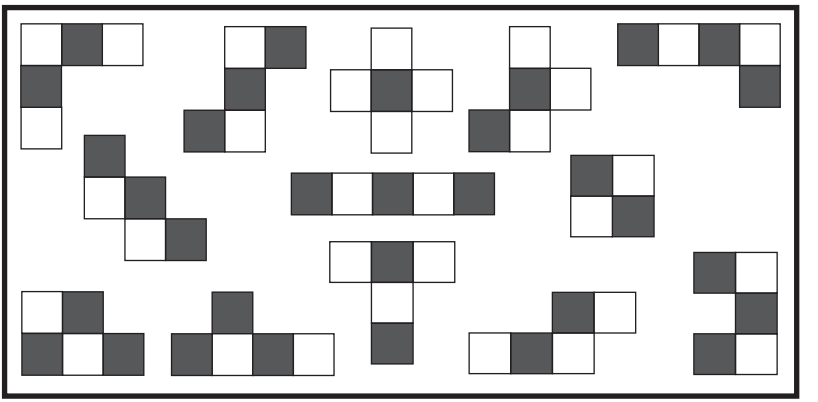
Dudeney, qui n'avait pourtant suivi aucune formation académique en mathématiques, n'avait pas son pareil pour introduire dans ses casse-tête des idées qui figureraient des années plus tard dans des recherches mathématiques tout ce qu'il y a de plus sérieuses.

Les formes composées de carrés connectés apparaissent à l'origine dans *The Canterbury Puzzles,* le premier livre de Dudeney, au travers d'un casse-tête inspiré d'une anecdote (sujette à caution) rapportée en 1613 par John Hayward dans son histoire de Guillaume le Conquérant. Alors que les fils de Guillaume, Henry et Robert, rendaient visite à Louis, l'héritier du trône de France, Henry affronta Louis aux échecs. Il le battit, ce qui rendit Louis fou de rage. La querelle dégénéra et les deux hommes en vinrent aux mains. « Henry frappa Louis avec l'échiquier et le blessa jusqu'au sang, raconte Hayward. Sur ce, [Henry et Robert] s'élancèrent sur leurs chevaux et piquèrent des éperons, aussitôt suivis des Français. »

97

L'échiquier brisé

Un échiquier est brisé en treize morceaux. Ces derniers, représentés plus bas, ont toutes les formes obtenues en connectant cinq cases, auxquelles s'ajoute un bloc de quatre cases.



Saurez-vous reconstruire l'échiquier ?

Dudeney suggérait de découper les formes dans du papier quadrillé, puis de les coller sur un carton. « Gardez-les à portée de main à la maison et elles vous procureront une source d'amusement perpétuel, écrivait-il. Et si vous réussissez le casse-tête… ne retenez surtout pas la disposition des pièces : vous retrouverez intact le plaisir du jeu quand vous aurez envie de vous y frotter à nouveau. »

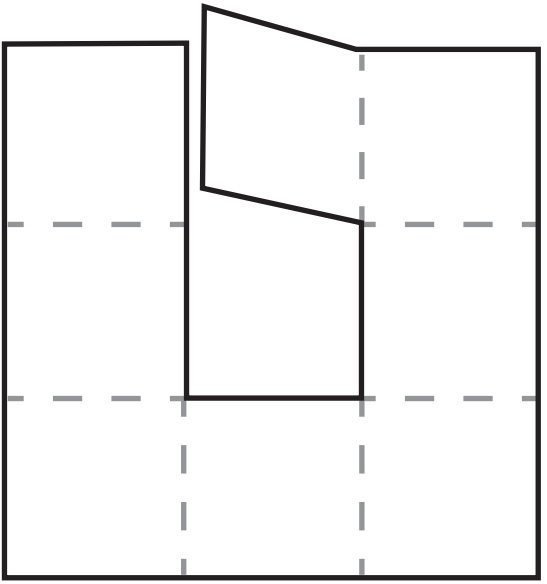
Puisque ciseaux et papier sont dégainés, voici un casse-tête de pliage très amusant que vous devriez pouvoir résoudre plus rapidement que le précédent.

98

Pliage cubique

Découpez et retirez le carré central d'un échiquier 3 × 3, comme illustré ci-dessous.

Saurez-vous plier l'anneau de huit cases de manière à former un cube ? Un cube étant constitué de six faces, deux des cases devront se chevaucher.



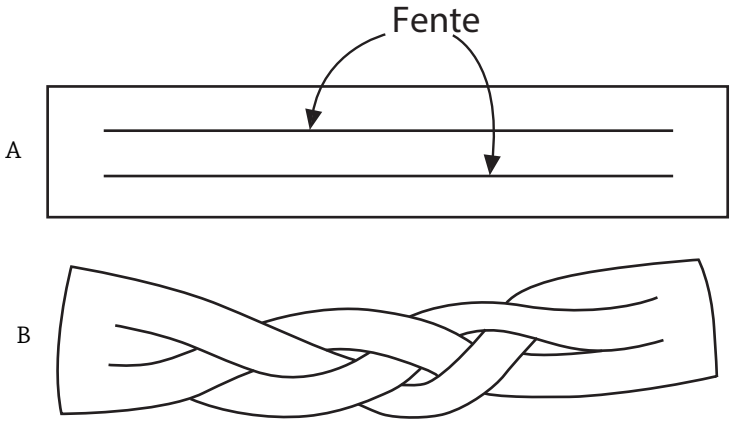
Si vous avez été scout ou guide et que vous avez appris à nouer une bague de foulard, sachez que vous n'avez pas gâché votre enfance. Cette compétence va (enfin) vous servir.

99

La tresse impossible

Découpez une fine bande dans un sac en plastique, puis pratiquez deux fentes, comme sur la partie A de l'illustration ci-dessous.

Saurez-vous tresser la bande comme sur la partie B ?

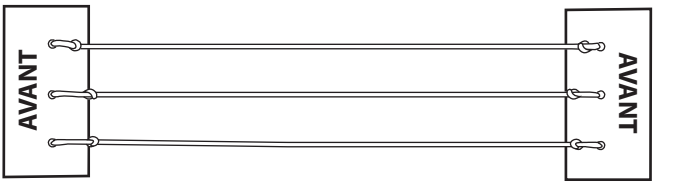


La première fois que je m'étais essayé à ce casse-tête, j'avais utilisé du papier, mais le papier se déchire facilement. C'est pour cela que je vous conseille d'utiliser du plastique. Ou prenez du cuir si vous êtes adepte de la culture scout.

Nul besoin d'idées révolutionnaires pour tresser les trois brins : il s'agit simplement de manipuler la bande de façon adéquate. Remarquez que les trois brins passent autour des autres à la manière d'une tresse de cheveux. Ils s'entrecroisent en six points et restent plats dans l'entrelacement. Tournez jeunesse !

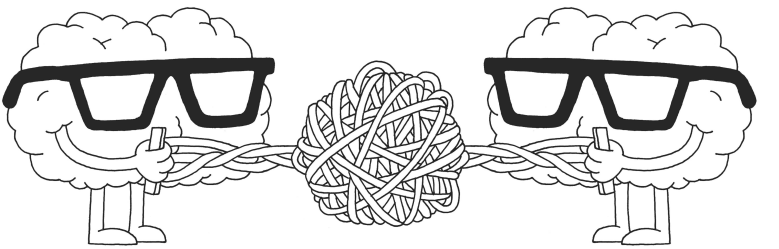
Le dernier casse-tête de ce chapitre demande du matériel supplémentaire : de la ficelle et du carton. Découpez deux petits rectangles de carton et reliez-les avec de la ficelle

comme illustré ci-dessous. Inscrivez « AVANT » sur les faces visibles des cartons.



D'un point de vue topologique, cet objet est équivalent à la bande aux deux fentes de la question précédente : tous deux comprennent trois brins aux extrémités attachées. La ficelle permet toutefois d'explorer davantage de propriétés physiques.

Piet Hein, un poète et mathématicien danois, popularisa le casse-tête qui va suivre après s'être familiarisé avec ce genre d'objets durant ses fréquentes visites à l'Institut de physique théorique de l'université de Copenhague, que dirigeait Niels Bohr dans les années 1930 et qui porte désormais son nom.

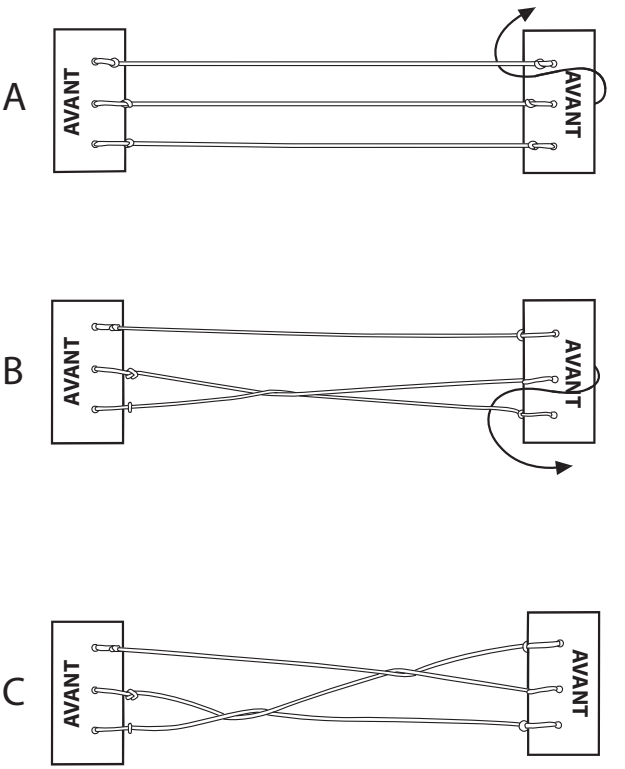


100

Tangloïdes

Maintenez l'extrémité gauche de l'objet avec trois ficelles et faites opérer un tour complet à l'extrémité droite en la glissant entre les deux brins supérieurs, comme illustré ci-dessous en A. Au terme de ce tour entier, l'inscription « AVANT » reste visible sur les deux cartons, comme vous pouvez le voir sur le diagramme B. Tourner ensuite d'un nouveau tour complet l'extrémité droite, en la glissant cette fois entre les deux brins inférieurs, afin d'aboutir à une position semblable à celle illustrée sur le diagramme C.

Saurez-vous dénouer les brins sans tourner aucun des morceaux de carton ?



Pour vous assurer de ne tourner aucun des cartons, tenez au même niveau celui de gauche de la main gauche et celui de droite de la main droite. Vérifiez toujours que le mot « AVANT » se trouve face à vous à gauche comme à droite. Comme il vous est interdit de tourner les cartons, tout ce que vous pouvez faire est de les glisser entre les brins.

Et cela suffit pour dénouer les ficelles ! J'éprouve une forme de jouissance intellectuelle face à cette propriété, qui semble tenir du miracle. Quoi de plus satisfaisant que de dénouer sans effort un entremêlement de fils ?

J'aimerais vraiment que vous fassiez vous aussi l'expérience de cette joie pure. Aussi j'ai décidé de ne pas donner la solution en fin d'ouvrage. Une fois n'est pas coutume, il faudra vous débrouiller seul !

Et cela fait, vous en redemanderez sans doute. Dans ce cas, répétez la procédure décrite dans l'énoncé, en maintenant toujours le carton gauche et en faisant opérer au carton droit deux rotations complètes. Mais plutôt que de tourner la première fois entre les deux brins supérieurs par l'avant, vous pouvez désormais tourner entre ces brins par l'arrière, ou tourner entre les deux brins inférieurs, par l'avant ou par l'arrière, ou encore tourner comme si vous tourniez un bouton à 360 degrés. La seconde rotation peut également se choisir parmi n'importe lequel de ces mouvements.

Quand le carton droit ne fait qu'un tour complet, il est impossible de démêler les brins par simple glissement. Mais quand il en fait deux, le nœud peut se dénouer *quelles que soient* les rotations choisies.

Piet Hein considérait qu'on s'éclatait encore davantage avec ce casse-tête lorsqu'on le transformait en un jeu à deux joueurs, qu'il avait baptisé *Tangloïde*. L'un des joueurs tient l'extrémité gauche du modèle, l'autre la droite. Le premier

joueur fait exécuter deux rotations à son carton, laissant à son adversaire le soin de dénouer l'entremêlement. Les joueurs changent ensuite de rôle. Le vainqueur est celui qui a dénoué les ficelles le plus vite.

Cette propriété fascinante, à savoir que les doubles rotations se dénouent toujours alors que les simples ne le peuvent jamais, aide à mieux comprendre certaines rotations dans l'espace, raison pour laquelle Niels Bohr et ses collègues s'intéressaient à ce modèle. Le physicien quantique britannique Paul Dirac, qui séjourna à Copenhague, l'utilisa comme support pédagogique « pour illustrer le fait que le groupe fondamental du groupe des rotations dans l'espace tridimensionnel admet un unique générateur d'ordre 2 ».

Un bon casse-tête, comme nous l'avons déjà vu, tient parfois du tour de magie. Mais il sert aussi parfois à expliquer la science la plus sérieuse !

PROBLÈMES POUR PURISTES

Jeux numériques

Êtes-vous plus intelligent qu'un enfant de 13 ans ?

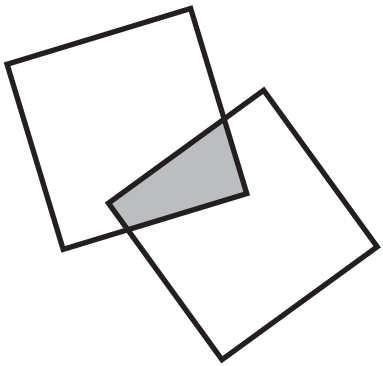
Règlement de la classe : les calculatrices sont interdites.

1) Combien d'affirmations de cette boîte sont vraies ?

Aucune de ces affirmations n'est vraie. Seule une affirmation est vraie. Deux affirmations, et pas davantage, sont vraies ; Toutes ces affirmations sont vraies.

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

2) Laquelle des formes suivantes ne peut pas s'obtenir en chevauchant deux carrés identiques ?



A Un triangle équilatéral
B Un carré
C Un cerf-volant
D Un heptagone
E Un octogone régulier

3) Seule une des égalités suivantes est vraie. Laquelle ?

A $44^2 + 77^2 = 4477$
B $55^2 + 66^2 = 5566$
C $66^2 + 55^2 = 6655$
D $88^2 + 33^2 = 8833$
E $99^2 + 22^2 = 9922$

4) De combien de manières différentes une rangée de cinq interrupteurs « Marche /Arrêt » peut-elle être configurée de sorte que deux interrupteurs adjacents ne soient jamais en position « Arrêt » ?

A 5 **B** 10 **C** 11 **D** 13 **E** 15

5) Dans l'addition suivante, chaque lettre représente un chiffre différent. Ainsi H = 8. Combien vaut T × I ?

```
  HUIT
+ HUIT
------
 SEIZE
```

A 0 **B** 2 **C** 15 **D** 27 **E** 42

6) Sur une horloge numérique qui affiche les heures, les minutes et les secondes, combien de fois par vingt-quatre heures les six chiffres changent-ils simultanément ?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 24

7) Parmi les nombres qui suivent, l'un est le plus petit cube pouvant s'écrire comme somme de trois cubes positifs distincts. Lequel ?

A 27 **B** 64 **C** 125 **D** 216 **E** 512

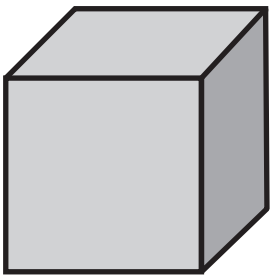
8) Dans une suite de nombres, chaque terme, passés les trois premiers, vaut la somme des trois précédents. Les trois premiers termes sont – 3, 0 et 2. Quel est le premier terme à dépasser 100 ?

A Le 11e terme **B** Le 12e terme **C** Le 13e terme **D** Le 14e terme **E** Le 15e terme

9) Les pages d'un livre sont numérotées 1, 2, 3, et ainsi de suite. Il faut au total 852 chiffres pour numéroter toutes les pages. Quel est le numéro de la dernière page ?

A 215 **B** 314 **C** 320 **D** 329 **E** 422

10) Le diagramme ci-dessous représente un cube unitaire, c'est-à-dire un cube de longueur, largeur et hauteur 1. Supposons qu'il soit bleu. Nous collons maintenant d'autres cubes unitaires bleus sur chacune de ses faces, de manière à former une « croix » tridimensionnelle. Si nous collons ensuite des cubes unitaires jaunes sur toutes les faces libres de cette croix, combien faudra-t-il de cubes jaunes ?



A 6 **B** 18 **C** 24 **D** 30 **E** 36

Un livre de problèmes mathématiques serait incomplet sans casse-tête sur les nombres. Je ne parle pas simplement d'énigmes qui utilisent des nombres – c'est le cas à l'évidence de la plupart des casse-tête qui précèdent – mais de problèmes qui osent questionner la nature même des nombres et célèbrent leurs propriétés. Ces casse-tête ne cherchent pas à se déguiser derrière des accessoires ou un scénario séduisants. Ils se présentent sans fard. Malgré cette honnêteté, les casse-tête sur les nombres savent rester parfaitement ludiques, je vous le garantis. Il est possible de s'amuser même avec une opération aussi triviale qu'une addition.

Combien vaut la somme des nombres de 1 à 100 ?

Pouvez-vous résoudre ce problème ? Si vous vous êtes déjà lancé la fleur au fusil et avez tenté d'additionner à la main la suite de nombres les uns après les autres, arrêtez tout de suite ! Il y a une façon plus sioux d'arriver à ses fins. La légende rapporte que c'est le génie des mathématiques Carl Friedrich Gauss, à la fin du XVIIIe siècle, qui l'ait découverte le premier alors qu'il portait encore des culottes courtes. Son instituteur avait soumis le problème à la classe

et attendait de ses élèves qu'ils effectuent l'addition de façon bête et méchante. Mais Gauss remarqua une propriété toute simple, qui demeurait cachée parmi les nombres tant qu'on n'avait pas mis le doigt dessus.

La somme 1 + 2 + 3 + 4 + … + 97 + 98 + 99 + 100 donne le même résultat en regroupant par paires les premiers et derniers nombres :

(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + (4 + 97) + … + (50 + 51).

Le total vaut alors 101 + 101 + 101 + 101 + … + 101, soit cinquante fois 101, ou 50 × 101 = 5 050.

Astucieux Carl ! Même si l'anecdote suggère que le gamin fut la première personne à avoir eu l'idée, le problème avait pourtant été déjà proposé un millier d'années auparavant par Alcuin dans ses *Propositiones ad Acuendos Juvenes* :

> *« Il est une échelle qui compte cent barreaux. Sur le premier barreau du haut, une colombe est perchée ; sur le deuxième barreau deux colombes, sur le troisième trois colombes, sur le quatrième quatre colombes, sur le cinquième cinq colombes, et ainsi de suite jusqu'au centième barreau.*
>
> *Qui peut dire combien il y a de colombes en tout ? »*

Si l'énoncé diffère, le calcul demeure : additionner les nombres de 1 à 100. La solution d'Alcuin passait aussi par un regroupement en paires, même s'il était fondé sur un autre choix. Il prenait le premier barreau de l'échelle et l'avant-dernier, obtenant 1 + 99 = 100, puis le deuxième et l'avant-dernier, et ainsi de suite.

L'addition s'écrivait alors :

(1 +99) + (2 + 98) + (3 + 97) + … + (49 + 51) + 50 du cinquantième barreau et 100 du centième.

Soit :

(49 × 100) + 50 + 100 = 4 900 + 150 = 5 050.

Sans doute moins élégante que celle de Gauss, l'option d'Alcuin présentait toutefois l'avantage de faire intervenir une multiplication par 100, plus facile à opérer qu'une multiplication par 101. Surtout si, comme Alcuin, vous écriviez en chiffres romains !

L'enseignement à tirer de ces deux formes du casse-tête est celui-ci : quand quelqu'un vous demande d'additionner une série de nombres, ne foncez pas tête baissée vers la solution la plus immédiate. Observez bien la série pour tourner ses propriétés à votre avantage.

Voici maintenant trois splendides casse-tête pour mettre tout cela en pratique.

101

Miroir, Miroir

Laquelle de ces deux additions produit le plus grand résultat ?

987654321	123456789
087654321	123456780
007654321	123456700
000654321	123456000
000054321	123450000
000004321	123400000
000000321	123000000
000000021	120000000
+ 000000001	+ 100000000

102

Dans l'esprit de Gauss

Voici, présentés dans l'ordre croissant, les 24 nombres à quatre chiffres formés par 1, 2, 3 et 4. À vous de les additionner !

1234	1423	2314	3124	3412	4213
1243	1432	2341	3142	3421	4231
1324	2134	2413	3214	4123	4312
1342	2143	2431	3241	4132	4321

103

La table d'addition

Et maintenant en deux dimensions ! Vous devinez le topo. Alors combien vaut la somme ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Les trois casse-tête qui suivent rappellent dans un esprit mathématique le mouvement baptisé « concrétisme » en poésie. Il s'agit de remplir neuf cases vides par les chiffres de 1 à 9 (sans doublons, vous devez utiliser tous les chiffres). Rien de plus réjouissant que de voir les éléments numériques les plus simples – les chiffres non nuls – s'agencer de manière aussi élégante.

Il existe 24 192 façons de disposer les neuf chiffres dans les neuf cases de chaque problème. En testant une combinaison par seconde, il vous faudrait plus de deux semaines pour les essayer toutes. Alors tâchez de réduire le nombre de combinaisons !

104

Le carré de chiffres

□ − □ = □

×

□ ÷ □ = □

=

□ + □ = □

105

Les équations fantômes

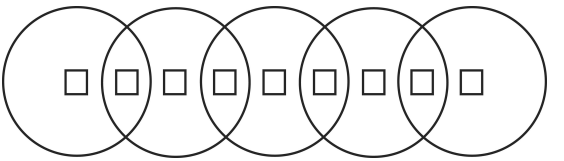
□□ × □ = □□

□ × □ = □□

106

Le numéro que vous avez demandé...

Trois casse-tête en une illustration : remplissez les cases de façon à obtenir 11 pour somme dans chaque cercle. Puis 13. Puis 14.



Thomas Dilworth rédigea un manuel de mathématiques intitulé *The Schoolmaster's Assistant, Being a Compendium of Arithmetic both Practical and Theoretical* (« L'assistant du maître d'école, en forme de compendium d'arithmétique théorique et pratique ») qui devint rapidement populaire en Grande-Bretagne puis aux États-Unis après sa publication en 1743. Il y proposait entre autres un nouveau type de casse-tête, dont voici un spécimen :

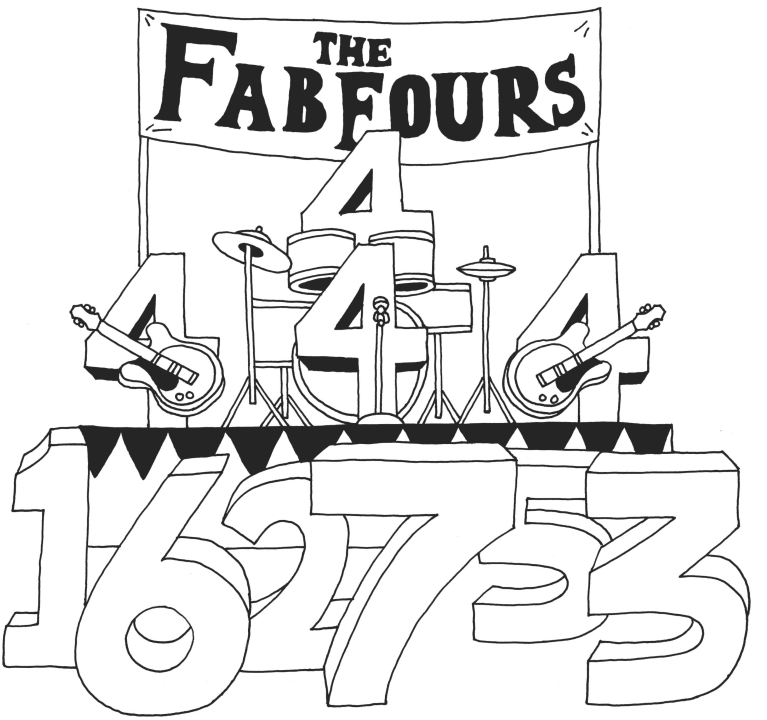
> *Jack dit à son frère Harry : « Je peux disposer quatre 3 de manière à obtenir 34. Sais-tu en faire autant ? »*

Solution : 33 + 3/3 = 34.

Alors que le but des trois problèmes précédents consistait à placer des nombres autour d'opérations mathématiques données, il s'agit ici de placer des opérations entre des nombres donnés. Un grand classique du genre, le casse-tête des « quatre 4 », apparut un siècle après l'ouvrage de Dilworth, en 1881, dans un numéro de la revue *Knowledge : an Illustrated Magazine of Science* (« Connaissance : un magazine de sciences illustré ») et fut soumis par une personne portant le pseudonyme de Cupidus Scientiae (« Désir de connaissance » en latin) :

« Il pourra sembler nouveau à certains lecteurs…, comme il me l'a semblé l'autre jour, que tous les nombres jusqu'à 20 inclus (et bien d'autres ensuite), à la seule exception de 19, peuvent s'exprimer par quatre 4 et tous les signes nécessaires, sauf l'élévation au carré ou au cube, dans toutes les configurations requises. »

Le casse-tête des quatre 4 est incroyablement simple, amusant, et addictif. Qu'une telle variété de nombres puisse s'obtenir avec les seuls chiffres 4, 4, 4 et 4 ne laisse pas d'émerveiller. Il nous faut toutefois clarifier la règle du jeu avancée par Cupidus Scientiae.



107

Les quatre quatre

[1] Formez tous les nombres de 0 à 9 avec quatre 4, des opérations élémentaires (+, –, ×, ÷) et des parenthèses. Les quatre 4 doivent être systématiquement tous utilisés pour constituer chaque nombre.

[2] Formez tous les nombres de 10 à 20 avec quatre 4. Vous pouvez cette fois vous servir en plus de la racine carrée √ et de la virgule (en écrivant par exemple « 4 »), ainsi que de la concaténation (en écrivant « 44 » ou « 444 » ou même « 4,4 »).

[3] Maintenant que vous êtes chaud, poursuivez de 21 à 50. Votre permis s'étend désormais à l'élévation à la puissance (pour écrire par exemple 4^4) et à la factorielle (pour écrire par

exemple 4 !). La factorielle d'un nombre se calcule en multipliant tous les nombres plus petits que lui :

$$4 ! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Je commence avec vous. Voici comment obtenir 0 avec quatre 4 :

$$4 - 4 + 4 - 4 = 0$$

Facile. Et voici maintenant comment obtenir 1 :

$$\frac{4+4}{4+4} = 1$$

Après 50, jusqu'où peut-on aller ? Bien au-delà ! Les seules opérations listées ci-dessus permettent de composer tous les nombres jusqu'à 100 à l'exception de 73, 77, 87 et 99. Ces derniers s'atteignent toutefois avec quelques symboles mathématiques supplémentaires. Exemple pour 99 :

(4/4) % – 4/4 = 99 (car quatre quarts fait 100 %.)

Dans l'édition de ses *Récréations et problèmes mathématiques* datée de 1911, W. W. Rouse Ball écrit à propos des quatre 4 qu'il n'a « jamais vu cette récréation imprimée, mais il semble s'agir d'un problème ancien et bien connu ». Il précise alors pouvoir atteindre 170.

L'édition de 1917 montre qu'il a ensuite bien travaillé : « En autorisant les opérations sur les puissances et l'usage des sous-factorielles, on peut monter jusqu'à 877 », écrit-il avant d'ajouter : « On peut atteindre 34 avec quatre 1, 36 avec quatre 2, 46 avec quatre 3, 36 avec quatre 5, 30 avec quatre 6, 25 avec quatre 7, 36 avec quatre 8 et 130 avec quatre 9. » Quatre 4 permettent donc d'aller « quatrément » plus loin !

Quelqu'un a-t-il jamais dépassé 877 ? Oui ! Dans la décennie qui a suivi, Paul Dirac, que nous avons déjà rencontré à la fin du chapitre précédent, a résolu le casse-tête des quatre 4 pour tous les nombres jusqu'à l'infini.

La solution de Dirac concernait en fait le problème des « deux 4 », qui circulait alors beaucoup à Cambridge, mais elle fonctionne aussi dans le cadre du problème qui nous intéresse. En autorisant l'usage des logarithmes, tout nombre n s'exprime par $\log_{\sqrt{4}/4}(\log_4\sqrt{\ldots}\sqrt{4})$, avec n racines carrées. (Pas d'inquiétude si vous ne connaissez pas les logarithmes, il s'agit simplement d'apprécier la brièveté et la généralité confondantes de la solution.) Dirac, grand amateur de casse-tête mathématiques, a dû prendre un réel plaisir à étendre un problème aussi célèbre par une formule si ingénieuse. « Il a tué le jeu », conclut pour sa part Graham Farmelo, dans sa biographie de Dirac, *The Strangest Man* (« L'Homme le plus étrange »).

En 1882, un an après la publication du problème des quatre 4 par le magazine *Knowledge*, le grand inventeur américain de casse-tête Sam Loyd proposa « Notre œuf de Colomb », une version quasi insurmontable et absurde du genre « vous-avez-les-nombres-trouvez-les-opérations ». L'ayant doté d'un prix de 1 000 dollars, soit environ 20 000 euros d'aujourd'hui tout de même, il ne reçut que deux solutions correctes sur les millions qui lui avaient été adressées. C'est du moins ce qu'il a claironné. Car Loyd était aussi doué pour l'autopromotion que pour la conception des casse-tête…

Par souci d'exhaustivité historique, je me devais d'inclure ce problème même si, ne le prenez pas mal, je doute en toute franchise que vous puissiez le résoudre. Mais allez-y, prouvez-moi que je me trompe !

108

Notre œuf de Colomb

Composez une addition dont le résultat soit aussi proche que possible de 82, avec huit points ou virgules et les sept chiffres suivants :

·4·5·6·7·8·9·0·

Les virgules servent à marquer les nombres décimaux et les points, placés sur un ou deux chiffres, indiquent une répétition infinie du bloc de chiffres ainsi marqué. Ainsi, $0{,}\dot{3}$ désigne 0,333 333… ou 1/3. De même, 1/7 peut s'écrire $0{,}\dot{1}42\ 85\dot{7}$ plutôt que 0,142 857 142 857 142 857…

Voilà pour le hors-d'œuvre. Mais avant d'attaquer le plat de résistance, je vous propose un petit intermède ludique comme on avait coutume de le faire dans les banquets médiévaux entre deux mets.

109

Des trois et des huit

Comment obtenir 24 avec 3, 3, 8 et 8 – ainsi que des opérations élémentaires (+, –, × et ÷) et des parenthèses ?

Le casse-tête numérique suivant, qui connut son heure de gloire il y a quelques années, était ainsi introduit : « Ce problème peut être résolu par des enfants de 6 ans en cinq ou dix minutes, par des développeurs informatiques en une heure, et par les plus diplômés en… hé bien essayez vous-mêmes ! »

Je ne suis pas certain que cette affirmation ait été scientifiquement vérifiée, mais elle vous incitera sûrement à éprouver vos talents sur ce casse-tête !

110

Un jeu d'enfant

8809 = 6	5555 = 0
7111 = 0	8193 = 3
2172 = 0	8096 = 5
6666 = 4	1012 = 1
1111 = 0	7777 = 0
3213 = 0	9999 = 4
7662 = 2	7756 = 1
9313 = 1	6855 = 3
0000 = 4	9881 = 5
2222 = 0	5531 = 0
3333 = 0	2581 = ?

Les nombres décrivent souvent des quantités. Un paragraphe. Six mots. Trois phrases.

Sous forme de liste, ils peuvent aussi représenter un *ordre*.

Les trois prochains présentent des séquences de nombres. Il s'agit à chaque fois de déterminer la règle du jeu et de deviner le terme qui suit.

111

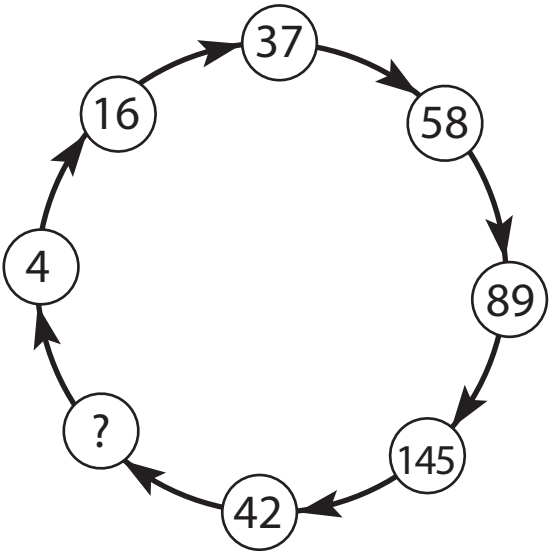
Suivez la flèche (I)

77 → 49 → 36 → 18 → ?

Le casse-tête qui suit a été conçu par Nob Yoshigahara, également auteur de celui qui a ouvert ce livre. La séquence présente la remarquable propriété de se mordre la queue !

112

Suivez la flèche (II)



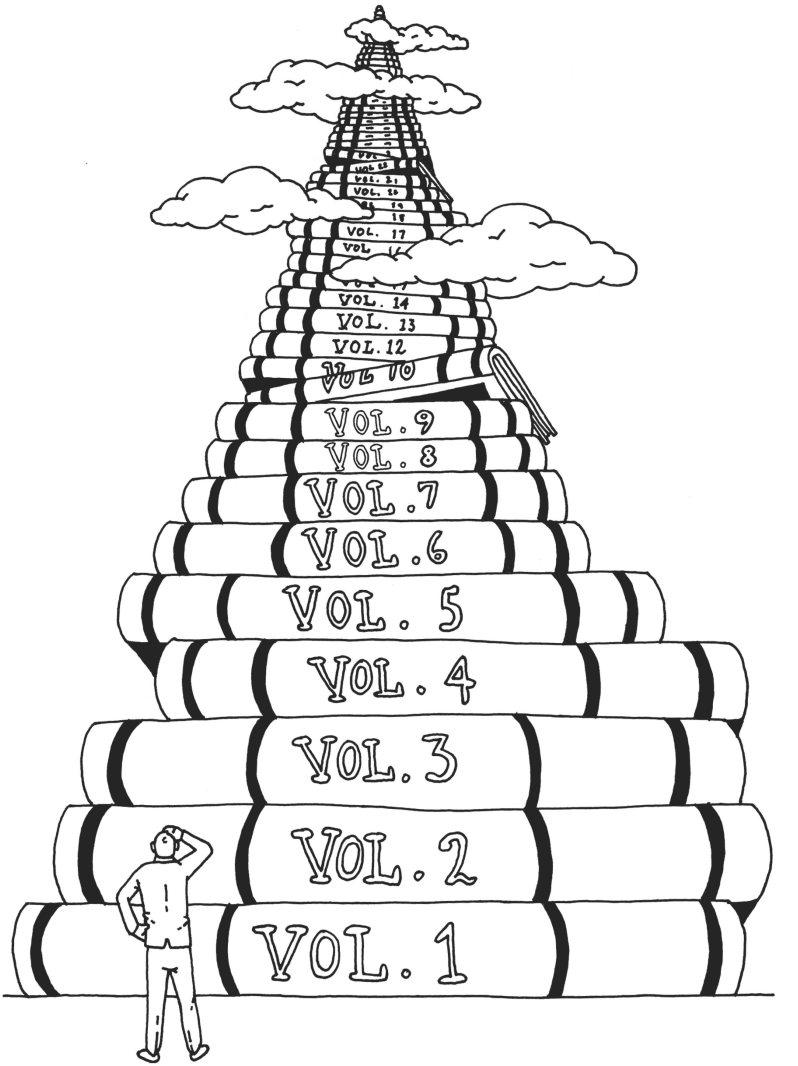
113

Suivez la flèche (III)

1 → 6 → 0 → 3 → 4 → 101 → ?

En tant qu'auteur passionné de mathématiques, j'aime naturellement les nombres et les mots et je cultive une affection toute particulière pour les casse-tête qui mélangent les deux.

Le problème suivant part d'une idée aussi simple que brillante : et si les nombres étaient listés dans l'ordre alphabétique…


VOL. 17
VOL. 14
VOL. 13
VOL. 12
VOL. 9
VOL. 8
VOL. 7
VOL. 6
VOL. 5
VOL. 4
VOL. 3
VOL. 2
VOL. 1

114

Le coin du dictionnaire

Un dictionnaire liste les nombres entiers de 1 à 1 billiard, soit 1 000 000 000 000 000, dans l'ordre alphabétique. Trouver :
La première entrée.
La dernière entrée.
La première entrée impaire.
La dernière entrée impaire.

Par souci de clarification, je précise que le dictionnaire respecte les règles suivantes :

[1] Les nombres ne peuvent pas commencer par « million », « milliard », « billion » ou « billiard », ces termes étant toujours précédés d'un autre nombre (« un milliard », « deux billions »…) ;

[2] Le classement alphabétique ne tient pas compte des espaces et des traits d'union : ainsi l'article « quatre mille » précède l'article « quatre-vingts ».

Sam Loyd fut l'un des premiers créateurs de casse-tête à proposer des problèmes consistant à deviner les nombres qui se cachent derrière des mots. La page suivante présente par exemple celui qu'il avait conçu sous la forme d'un ticket de caisse.

L'astuce est d'utiliser une clé qui fait correspondre chaque lettre à un chiffre. Cette clé est PEACH BLOWS, le nom d'une variété de pommes de terre. Chaque lettre de ce mot, prise dans l'ordre d'apparition, est associée à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 0 : P est remplacé par 1, E par 2, A par 3, C par 4, H par 5 et ainsi de suite. Le mot CHESS se transforme ainsi en 45 200 et le mot CASH en 4 305. La liste de 15 articles ci-dessus s'interprète alors comme une somme donc le résultat vaut 3 779 887, nombre qui correspond bien au mot ALLWOOL.

C H E S S
C A S H
B O W W O W
C H O P S
A L S O P ’S
P A L E A L E
C O O L
B A S S
H O P S
A L E S
H O E S
A P P L E S
C O W S
C H E E S E
C.H.S O A P
S H E E P

A L L W O O L

Quoique très astucieux, ce casse-tête de Loyd met en jeu trop de nombres pour être vraiment amusant. Aujourd'hui rangé sous l'étiquette de « cryptarithme », d'« alphamétique » ou celle un peu pompeuse d'« arithmétique verbale », ce type de problèmes a été rapidement perfectionné par Henry Ernest Dudeney. En 1924, il proposa l'un des plus classiques et des meilleurs du genre :

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

Il s'agit de trouver les chiffres qui composent une addition juste, sachant qu'une même lettre correspond à un même chiffre, que deux lettres distinctes correspondent à des chiffres distincts et que les lettres les plus à gauche ne correspondent jamais à 0.

Loyd, de seize ans plus âgé que Dudeney, était le seul concepteur de casse-tête de l'époque capable de rivaliser en termes de productivité et d'originalité. Malgré la distance et l'océan Atlantique qui les séparait, ils ont longtemps correspondu. Dudeney a toutefois mis un terme à leurs relations amicales après avoir découvert que Loyd lui empruntait des casse-tête qu'il présentait comme des créations propres…

Les personnalités de deux hommes s'accordaient on ne peut mieux aux stéréotypes de leurs pays respectifs. D'un côté, Loyd, véritable machine à produire des casse-tête, agissait en entrepreneur énergique qui brevetait ses meilleures idées, offrait des prix en espèces sonnantes et trébuchantes

à qui trouverait des solutions et enjolivait sa biographie à hauteur de sa réputation grandissante. De l'autre côté, Dudeney était un homme tranquille et un brin ronchon qui vivait loin de l'agitation de Londres – et fumait la pipe.

SEND MORE MONEY est si célèbre que ce serait un crime de ne pas l'inclure ici. De même, je me sens obligé de vous mettre sur la piste de sa résolution. La lettre M doit correspondre au chiffre 1 : le résultat à cinq chiffres d'une addition de deux nombres à quatre chiffres ne peut en effet commencer que par 1. (Additionné à lui-même, 9 999, le plus grand nombre à quatre chiffres, donne 19 998, qui commence par 1. La somme de deux nombres à quatre chiffres, si elle est formée de cinq chiffres, ne peut donc pas débuter par deux ou plus.)

```
  S E N D
+ 1 O R E
---------
1 O N E Y
```

Que S + 1 = 1O (où O désigne la lettre et non le chiffre zéro) suppose que S = 9, ou que S = 8 et que la colonne des centaines produise 1 de retenue. Dans ce dernier cas, la lettre O correspondrait au chiffre 0 et la somme prendrait la forme ci-contre.

Pour clarifier, j'ai noté la retenue au-dessus du 8. Que l'addition soit juste implique ensuite, par la colonne des centaines, que E + 0 = 10 + N ou que, si la colonne des dizaines produit une retenue, 1 + E + 0 = 10 + N. (Le 10 dans ces équations correspond à la retenue de la colonne des milliers.)

```
   1
  8 E N D
+ 1 0 R E
---------
1 0 N E Y
```

Le premier cas conduirait à une différence de 10 entre E et N, une situation impossible puisque E et N sont tous deux inférieurs à 10. Le dernier cas se révèle tout aussi impossible, car les seules valeurs vérifiant E – N = 9 sont E = 9 et N = 0 : or, deux lettres différentes ne peuvent pas représenter le même chiffre et O correspond déjà à 0. Donc S = 9… et je laisse la suite à votre sagacité. (La solution se trouve à la fin du livre.)

Il existe de nombreux cryptarithmes brillants qui possèdent chacun leur spécificité. En voici un qui se compose de l'addition de quatre termes égaux.

115

Le carré de valets

Trouver les chiffres qui se cachent derrière les lettres et forment une addition valide :

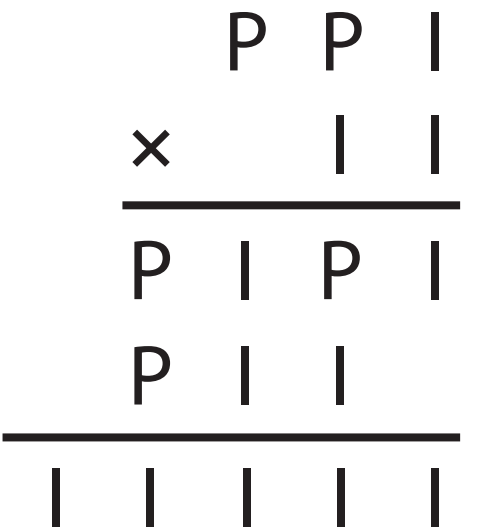
```
  VALET
+ VALET
+ VALET
+ VALET
= CARRE
```

Voici un autre cryptarithme présentant un aspect inattendu.

116

Pairs et impairs

Dans la multiplication présentée ci-dessous, les P et les I désignent respectivement des chiffres pairs et impairs. En d'autres termes, P correspond à 0, 2, 4, 6 ou 8 et I correspond à 1, 3, 5 ou 9. Deux P ou deux I ne désignent pas nécessairement les mêmes lettres, bien que cela puisse arriver dans certains cas. Saurez-vous reconstruire la multiplication ? (L'espace en quatrième ligne dans la colonne des unités représente un 0, comme souvent dans les multiplications faites à la main. Sa présence est d'ailleurs systématique et il n'y a rien à en déduire.)



Le problème précédent a été conçu au début des années 1960 par William Fitch Cheney, un professeur de mathématiques et magicien. Il parut pour la première fois dans la rubrique de jeux mathématiques que tenait Martin Gardner dans *Scientific American*, la version américaine de *Pour la Science*. Si Sam Loyd fut le grand concepteur de casse-tête américain, Gardner en fut l'ambassadeur auprès du grand public. Tant par la rubrique dans *Scientific American* qu'il anima pendant plus de vingt ans que par ses nombreux livres, Gardner réunit une collection de casse-tête mathématiques unique. Son activité l'avait également placé au centre d'un vaste réseau informel de passionnés – comme le susnommé Fitch Cheney – dont Gardner reprenait les meilleures idées dans *Scientific American*.

Puisque nous nous sommes aventurés sur un territoire quasi littéraire, commun aux nombres et aux lettres, saviez-vous que les nombres peuvent écrire leur propre autobiographie ? Intrigant, n'est-ce pas ?

Par « sa propre autobiographie », j'entends qu'un nombre peut se compter lui-même. Voici comment. Le nombre 1 210 se compte lui-même en ce sens que son premier chiffre, à savoir 1, compte le nombre de 0 dont il est constitué, que son deuxième chiffre, à savoir 2, compte son nombre de 1, que son troisième chiffre compte le nombre de 2 et son quatrième le nombre de 3. Cette propriété d'autodescription apparaît plus clairement quand le nombre est inscrit dans un tableau.

0	1	2	3
1	**2**	**1**	**0**

Chaque chiffre de la seconde ligne désigne le nombre d'occurrences dans cette même seconde ligne du chiffre situé au-dessus de lui.

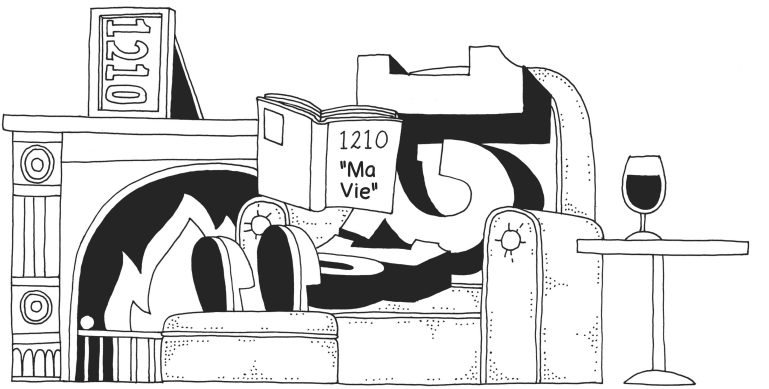
Les nombres comme 1 210, dont le chiffre le plus à gauche indique le nombre de 0 qui le constitue, dont le chiffre ensuite un cran à droite compte le nombre de 1, et ainsi de suite, sont dits des nombres « autobiographiques ». Il n'existe que deux nombres autobiographiques à quatre chiffres : 1 210 et 2 020.

Le seul nombre autobiographique à cinq chiffres est 21 200 :

0	1	2	3	4
2	**1**	**2**	**0**	**0**

Il est formé de deux 0, d'un 1, de deux 2, d'aucun 3 et d'aucun 4.

Vous avez compris le concept ? Place aux problèmes maintenant.



117

L'autobiographie à dix chiffres

Quel est l'unique nombre autobiographique à dix chiffres ?

Ce nombre s'inscrira dans la seconde ligne du tableau ci-dessous. Chacun de ses chiffres désignera le nombre d'occurrences du chiffre placé au-dessus de lui.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Un nombre qui comporte tous les dix chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0, comme 1 234 567 890, est dit « pandigital ». (En outre, un nombre pandigital ne commence pas par 0.)

118

Pandémonium pandigital

Combien existe-t-il de nombres pandigitaux à dix chiffres ?

Voici une propriété curieuse à des nombres pandigitaux à dix chiffres : ils sont tous divisibles par 3.

Nous pouvons vérifier cela à l'aide du test de divisibilité que vous avez peut-être appris à l'école : un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.

Or, un nombre pandigital à dix chiffres contient une fois tous les chiffres. La somme de ses chiffres vaut donc 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 0 = 45, un nombre divisible par 3. Les pandigitaux à dix chiffres sont donc tous divisibles par 3. Admirable.

Il existe des tests de divisibilité moins connus :

Divisibilité par 4. Un nombre est divisible par 4 si et seulement si ses deux derniers chiffres le sont.

Divisibilité par 8. Un nombre est divisible par 8 si et seulement si ses trois derniers chiffres le sont.

Peut-être vous demandez-vous pourquoi ces tests sont vrais ?

Ou pas. Dans tous les cas, ils faciliteront la résolution du casse-tête suivant.

119

Pandigital et pandivisible

Trouver le nombre pandigital à dix chiffres *abcdefghij* vérifiant :
***a* est divisible par 1**
***ab* est divisible par 2**
***abc* est divisible par 3**
***abcd* est divisible par 4**
***abcde* est divisible par 5**
***abcdef* est divisible par 6**
***abcdefg* est divisible par 7**
***abcdefgh* est divisible par 8**
***abcdefghi* est divisible par 9**
***abcdefghij* est divisible par 10**

Ce problème témoigne d'une rare élégance, ne serait-ce que parce que les conditions proposées aboutissent à une solution unique. Une calculette vous sera nécessaire, mais le jeu en vaut la chandelle.

Pensez maintenant à un nombre.

Un nombre à trois chiffres dont le premier et le dernier diffèrent d'au moins deux unités. Par exemple, 258.

Renversez l'ordre de ses chiffres, puis calculez la différence entre les deux nombres ainsi obtenus.

Dans notre exemple 852 – 258 = 594.

Ajoutez à ce nombre son propre renversé : 594 + 495.

Le résultat vaut 1 089.

Testez la même procédure sur un nombre différent : vous le renversez, calculez la différence, que vous ajoutez à son symétrique. Résultat ? Vous l'aviez deviné : 1 089.

Quel que soit le nombre de départ, vous obtiendrez toujours 1 089. Plutôt cool quand on vous le montre pour la première fois.

Mais 1 089 jouit d'une autre particularité arithmétique notable…

120

1089 et son ordre

Multiplier 1089 par 9 le renverse : 1 089 × 9 = 9801

Saurez-vous trouver le nombre à quatre chiffres qui se renverse quand il est multiplié par 4 ? En d'autres termes, le nombre *abcd* tel que *abcd* × 4 = *dcba*.

Le nombre 102 564 change aussi de manière étonnante après une multiplication par 4 :

102 564 × 4 = 410 256

Avez-vous remarqué ? Le dernier chiffre de 102 56**4** prend la tête de **4**10 256, les autres nombres demeurant identiques. En d'autres termes, multiplier 102 456 par 4 donne le même ensemble de chiffres, le plus à droite passant à l'extrême gauche.

La même transformation s'observe dans la multiplication suivante :

142 857 × 5 = 714 285

Le chiffre le plus à droite du premier nombre, ici 7, s'est positionné à l'extrême gauche dans le résultat, sans affecter l'ordre des autres chiffres.

121

Et le dernier sera le premier

Saurez-vous trouver un nombre *N* qui, une fois multiplié par 2, donne un résultat formé des mêmes chiffres dans le même ordre, à l'exception du dernier qui est devenu le premier.

(En d'autres termes, il advient à *N* après une multiplication par 2 ce qu'il advient à 102 564 après une multiplication par 4 et à 142 857 après une multiplication par 5.)

Freeman Dyson, l'éminent physicien britannique, entendit parler du problème précédent à la cafétéria lors d'un colloque scientifique. « Oh, ça n'a pas l'air bien difficile, dit-il en haussant les épaules. Avant de s'empresser d'ajouter : mais le plus petit nombre vérifiant cette propriété comporte 18 chiffres ! »

Selon le *New York Times*, qui a relaté l'histoire, les collègues de Freeman demeurèrent stupéfaits. Personne ne savait d'où il avait pu tirer la connaissance d'une telle caractéristique, ou, « plus terrifiant encore, comment il était parvenu à calculer de tête ce résultat en moins de deux secondes ».

Pourtant, l'analyse de Dyson était parfaitement exacte et ne demande que des mathématiques compréhensibles par un élève de primaire.

À mesure que nous approchons de la fin de ce livre, les nombres deviennent de plus en plus grands. Tellement grands, en fait, que l'espace manque pour les écrire…

122

Puissance neuf

Les neuf nombres qui suivent correspondent aux quatre derniers chiffres de 31^9, 32^9, 33^9, 34^9, 35^9, 36^9, 37^9, 38^9 et 39^9 listés dans un ordre aléatoire.
Saurez-vous les remettre dans le bon ordre ?

2848
5077
1953
6464
8759
8832
0671
1875
8416

Restons dans les grands nombres. Comparé à 39^9, celui dont nous allons parler maintenant est un géant.

123

À peu près

Combien vaut à peu près 2^{64} ?

Notre dernier nombre considère lui-même 2^{64} comme insignifiant.

124

Nuls !

Par combien de 0 le nombre 100 ! se termine-t-il ?

Comme nous l'avons déjà vu page 189, 100 ! désigne le nombre 100 multiplié par tous les nombres entiers plus petits que lui, soit $100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. Je ne vous demande pas de calculer le résultat (qui comporte tout de même 158 chiffres). Au lieu de cela, exploitez votre instinct mathématique pour comprendre ce que cela signifie réellement quand un nombre se termine par des zéros.

SOLUTIONS

En guise d'apéritif. *Êes-vous plus intelligent qu'un enfant de 11 ans ?* (p. 18)

1) D

Les trois illustrations montrent que les six faces du cube portent en tout et pour tout les six lettres I, K, M, O, U et P. D'après la première image, les faces I et M présentent toutes deux une arête commune avec la face K. D'après la deuxième image, les faces O et U présentent également une arête commune avec la face K. Seules quatre faces peuvent présenter une arête commune avec la face K.

Sur le cube positionné comme sur la première illustration, avec K au sommet, la face M est adjacente à la face I en tournant dans le sens horaire. De la seconde illustration, en positionnant mentalement la face K au sommet, nous déduisons que la face U est adjacente à la face O en tournant dans le sens horaire. Les quatre faces encadrant K se suivent donc dans l'ordre horaire M-I-U-O. Nous en concluons que la face M est opposée à la face U.

2) D

Après neuf mensonges, son nez mesurera $2^9 \times 5$ cm = 512 × 5 cm = 25,6 m, soit une longueur comparable aux 23,8 m d'un court de tennis. Une longueur très éloignée du maximum physique que peut atteindre le nez de Pinocchio, selon un rapport établi en 2014 par le Centre interdisciplinaire des sciences de l'Université de Leicester. Fiché sur une tête en bois de 4,18 kg, un nez pesant initialement 6 g et mesurant un pouce (2,54 cm) se briserait en effet après 13 mensonges, soit une longueur de 208 m.

3) C

Douze est formé de cinq lettres et n'est pas un multiple de 5.

4) D

Bon, d'abord Amy se trouve à la gauche de Ben et Chris. Ces trois personnes sont donc dans l'ordre : Amy, Ben, Chris ou Amy, Chris, Ben. Nous ne savons rien de plus. Donc D est sûrement vrai. Aucune des autres affirmations n'est *certainement* vraie, même si B *pourrait* l'être.

5) E

Une possibilité consiste à trouver en tâtonnant. Une autre consiste à prendre conscience de cette règle : dessiner une figure sans lever le crayon du papier, et sans repasser par-dessus le trait d'une ligne existante, suppose qu'il ne doit pas y avoir plus de deux points de croisements où se rencontrent un nombre impair de lignes. Seule la figure E vérifie ce critère.

6) B

J'espère que vous connaissez au moins la table de multiplication par 7 ! Si tel est le cas, vous ne serez pas surpris que 7 divise 35, donc que 7 divise 350 000. Comme 7 divise aussi 49, 7 divise 4 900. Comme 354 972 = 350 000 + 4 900 + 72, il nous reste à trouver le reste de 72 par 7. Comme 7 × 10 = 70, ce reste vaut 2.

7) C

La famille compte au moins deux garçons, car si elle n'en comptait qu'un, celui-ci n'aurait pas de frère, ce qui contredirait l'énoncé. De la même façon, elle doit compter au moins deux filles, d'où un nombre de quatre personnes au minimum.

8) E

Faites rapidement le calcul au dos d'une enveloppe :

$$\begin{array}{r} 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1 \\ \times\ 9 \\ \hline 8\,8\,8\,8\,8\,8\,8\,8\,9 \end{array}$$

9) A

Il reste encore un peu de place sur l'enveloppe ? Voici les calculs à exécuter : $p = 105 - 47 = 58$; $q = p - 31 = 58 - 31 = 27$; $r = 47 - q = 47 - 27 = 20$; $s = r - 13 = 20 - 13 = 7$; $t = 13 - 9 = 4$; $x = s - t = 7 - 4 = 3$.

10) A

Il aurait été malvenu de ma part de ne pas avoir proposé une longue division. Comme 20/11 = 1,818 181..., seuls deux chiffres apparaissent.

2. Trois hommes et leurs sœurs (p. 27)

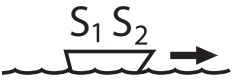
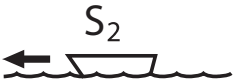
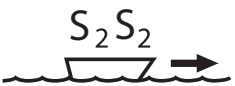
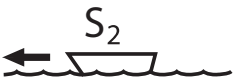
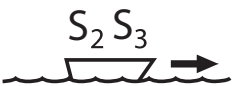
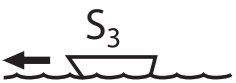
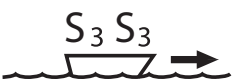
Commençons par la solution en neuf passages. Dans ce contexte machiste, les femmes rament au moins sur six traversées – si ce n'est toutes. La stratégie consiste en gros à faire traverser le premier couple, puis le deuxième, puis le troisième, en laissant toujours les frères débarquer avant les sœurs, comme indiqué page suivante.

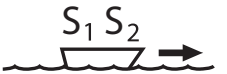
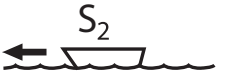
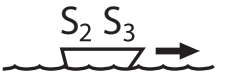
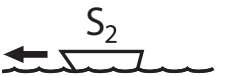
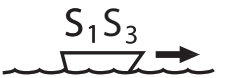
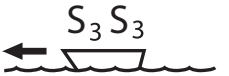
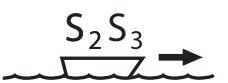
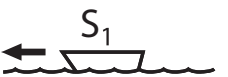
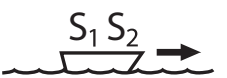
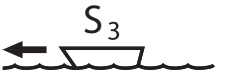
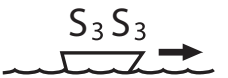
La seconde étape n'est pas permise dans l'interprétation plus stricte de l'énoncé, car lorsque la sœur du premier couple retourne sur la rive gauche, elle se trouve seule et en présence d'un autre homme que son frère. Dans cet autre cadre, la solution la plus courte compte onze traversées. Le problème du loup, de la chèvre et des choux nous avait enseigné que faire traverser tout le monde nécessitait un aller-retour et un aller pour chaque passager. Il nous faut ici procéder de même avec chaque sœur.

La page 214 indique une façon de faire.

Cette solution est celle que donne Alcuin et qui est formulée (dans la version de l'énigme où les couples sont maris et femmes) dans l'hexamètre latin. Il se traduit approximativement ainsi :

Femmes, femme, femmes, épouse, hommes, homme et épouse,
Hommes, femme, femmes, homme, homme et épouse.

Rive gauche		Rive droite
1) S_2 S_3 S_2 S_3		
2) S_2 S_3 S_2 S_3		S_1
3) S_2 S_3 S_3		S_1
4) S_2 S_3 S_3		S_1 S_1
5) S_3 S_3		S_1 S_1
6) S_3 S_3		S_1 S_1 S_2
7) S_3		S_1 S_1 S_2
8) S_3		S_1 S_1 S_2 S_2
9)		S_1 S_1 S_2 S_2

Rive gauche		Rive droite
1) $S_1\ S_2\ S_3\ S_3$		
2) $S_1\ S_2\ S_3\ S_3$		S_1
3) $S_1\ S_2\ S_3$		S_1
4) $S_1\ S_2\ S_3$		$S_1\ S_3$
5) $S_2\ S_2$		$S_1\ S_3$
6) $S_2\ S_2$		$S_1\ S_1$
7) $S_2\ S_3$		$S_1\ S_1$
8) $S_2\ S_3$		$S_1\ S_2\ S_3$
9) S_3		$S_1\ S_2\ S_3$
10) S_3		$S_1\ S_2\ S_1\ S_2$
11)		$S_1\ S_2\ S_1\ S_2$

3. Le pont suspendu (ou Quatre garçons dans le vent) (p. 28)

La stratégie que je mentionne dans le texte consiste à ce que John, le marcheur le plus rapide, traverse avec chacun de ses amis à tour de rôle. Il traverse avec Paul en 2 minutes

et retourne en 1. Il traverse avec George en 5 minutes et retourne en une. Il traverse finalement avec Ringo en 10 minutes. Temps total : 2 + 1 + 5 + 1 + 10 = 19 minutes.

Cette stratégie paraît à première vue optimale. Pourquoi en effet ne pas se servir de l'homme le plus rapide à chaque fois ? Eh bien parce qu'il est plus efficace en réalité que les lambins se regroupent et avancent de conserve. Et voici comment :

1) John traverse avec Paul en 2 minutes et revient en 1 ;

2) George et Ringo traversent ensemble, ce qui leur prend 10 minutes ;

3) Ils passent la lampe torche à Paul qui traverse de nouveau le pont en 2 minutes ;

4) John et Paul traversent une dernière fois le pont en 2 minutes.

Total : 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17 minutes.

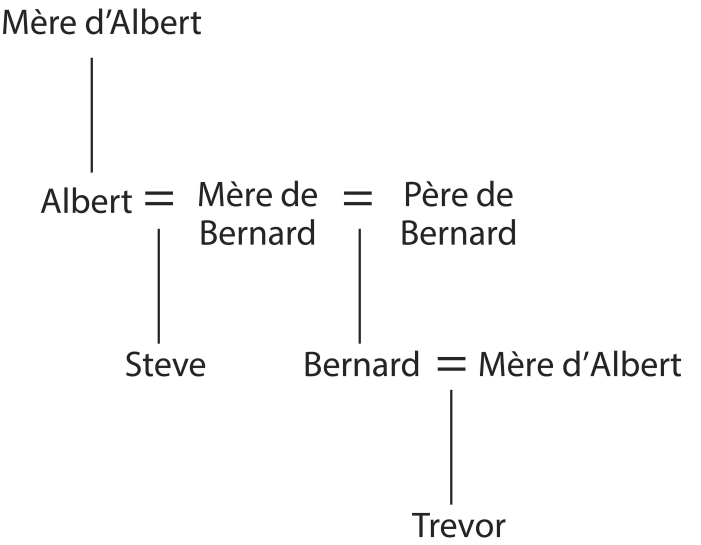
Le caractère génial de ce casse-tête tient à ce que la chose qui paraît à éviter, c'est-à-dire réduire la participation de John, se révèle en fait la chose à faire. La solution provoque un véritable effet de sidération !

Pour mieux nous convaincre que les plus lents gagnent à traverser ensemble, imaginons que l'énoncé stipule que John traverse en 1 minute, Paul en 2 minutes, mais que George traverse en 24 heures et Ringo en 24 heures et 1 minute. Il devient maintenant bien plus évident que George et Ringo doivent passer ensemble, gagnant ainsi 24 heures sur toute autre configuration.

4. Le double mariage (p. 30)

Chaque enfant est à la fois oncle et neveu de l'autre. Quoique de formulation très simple, ce problème triture diablement les méninges ! Appelons les deux hommes

Albert et Bernard, et leurs enfants Steve et Trevor. Voici leur arbre généalogique :



Bernard et Steve sont demi-frères car ils ont la même mère. Trevor, le fils de Bernard, est donc le neveu de Steve.

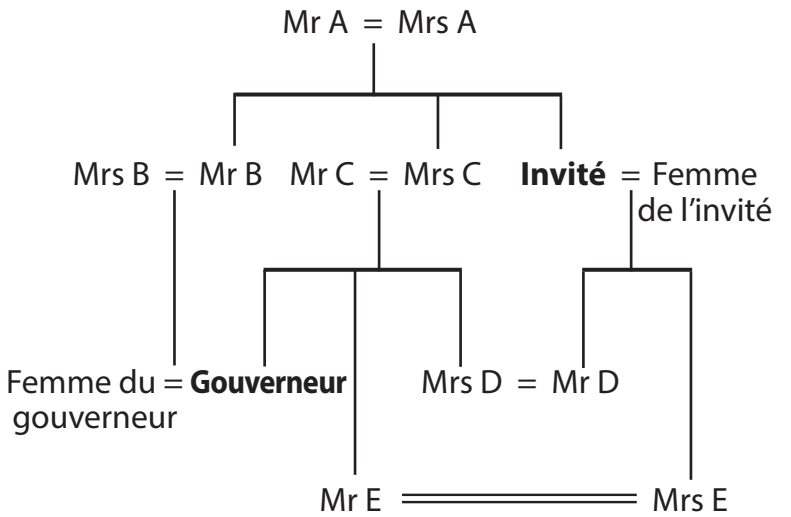
Ce sac de nœuds familial se complique encore quand on considère que la mère de Bernard est mariée à Albert, donc que la belle-mère de la mère de Bernard est la mère d'Albert. C'est-à-dire que la mère d'Albert est la belle-grand-mère de Bernard. Donc que Bernard est marié avec sa belle-grand-mère. Ce qui le rend beau-grand-père de lui-même.

5. Le dîner intime (p. 30)

Il y aura un seul invité.

Le diagramme ci-dessous représente les liens qui unissent cette étrange famille. Le père du gouverneur est Mr C., si bien que l'invité est le beau-frère du père du gouverneur. Les autres

descriptions caractérisent toutes un chemin différent qui mène du gouverneur à l'invité : via le frère du gouverneur (Mr E), via son beau-père (Mr B) et via son beau-frère (Mr D).



6. Menteurs, menteurs (p. 31)

Il faut chercher les combinaisons de vérités et de mensonges qui aboutissent à une contradiction.

Supposons que Berta dise la vérité. Il s'ensuit que Greta ment. Donc que Rosa dit la vérité. Mais si elle dit la vérité, alors Berta *et* Greta mentent, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Donc Berta ne dit pas la vérité.

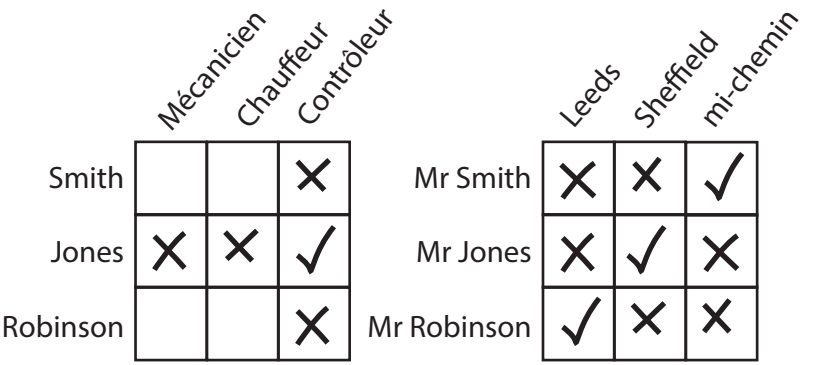
Si maintenant Berta ment, alors Greta dit la vérité, ce qui signifie que Rosa ment. Si elle ment, alors Berta ou Greta dit la vérité, une affirmation valable. La combinaison où Berta et Rosa mentent et Greta dit la vérité est cohérente, et constitue de fait la solution.

7. Smith, Jones et Robinson (p. 32)

Comme le passager qui habite le plus à proximité du contrôleur gagne exactement trois fois plus que lui, ce passager ne peut pas être Mr Jones, dont le salaire n'est pas divisible par trois. Mais le passager qui habite le plus près du contrôleur ne peut pas être non plus Mr Robinson, puisque le contrôleur habite entre Leeds et Sheffield et que Mr Robinson habite à Leeds.

Le plus proche voisin du contrôleur, c'est-à-dire le passager qui réside à mi-chemin entre Leeds et Sheffield, doit donc être Mr Smith. Nous pouvons donc cocher la case supérieure droite du tableau de droite, comme indiqué ci-dessous, et déduire que Mr Jones habite Sheffield, car c'est la seule option encore ouverte.

L'homonyme du contrôleur habite Sheffield. Nous savons que Mr Jones habite Sheffield. Donc le contrôleur doit être Jones. Nous pouvons cocher la case Jones / contrôleur, comme représenté ci-dessous à gauche, et barrer les autres cases de la même colonne et de la même ligne puisque Jones n'a pas d'autres occupations et que les autres ne sont pas le contrôleur.



L'affirmation selon laquelle Smith bat le chauffeur au billard indique que Smith n'est pas le chauffeur (qui est donc Robinson). Nous pouvons donc barrer Smith / chauffeur Nous savons déjà que Smith n'est pas le contrôleur. Par élimination, Smith est donc le mécanicien.

8. L'école des craques (p. 34)

		Affirmations											
		JJ	GG	BB	SS	MS	DS	KS	JT	JF	LL	FF	#F
Au cinéma	JJ	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V	5
	GG	F	V	F	F	F	V	V	F	V	F	V	6
	BB	F	F	V	V	V	F	V	V	F	F	V	5
	SS	F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	V	5
	MS	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	6
	DS	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	8
	KS	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	6
	JT	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V	6
	JF	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V	5
	LL	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V	5
	FF	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V	5

La stratégie consiste à supposer tour à tour que chaque fille a été au cinéma et à compter le nombre de contre-vérités qui découlent de ces hypothèses.

Supposons par exemple que Joan Juggins a été au cinéma. Son affirmation selon laquelle Joan Twigg a été au cinéma est donc fausse, de même que celle de Gertie Gass, tandis que Bessie et Sally disent la vérité. Pour ne pas nous emmêler les pinceaux, nous avons tout intérêt à résumer ces informations dans un tableau. Dans celui qui figure ci-dessus, la première ligne représente la validité ou non des

affirmations en supposant que Joan Juggins a été au cinéma, la deuxième en supposant que c'est Gertie Gass qui y a été, et ainsi de suite. La dernière colonne totalise le nombre de déclarations fausses. En désignant vrai par V et faux par F, nous avons donc établi que la première ligne commence par F, F, V, V. Une fois complété, le tableau adopte la forme présentée.

Si au moins sept affirmations sont fausses, c'est donc que Dorothy Smith est la cinéphile secrète.

9. Une affaire de parenté (p. 35)

Notre problème compte cinq hommes : Jenkins, Tomkins, Perkins, Watkins et Simkins. Par souci de simplicité, désignons-les par J, T, P, W et S. Il compte aussi cinq femmes, épouses et mères d'hommes spécifiques (bien qu'une femme ne soit jamais la mère et l'épouse du même homme ; l'amour dans la vallée de Kinsley présente certes des caractéristiques étranges, mais pas à ce point !). Identifions les femmes par leurs relations de sang en employant des minuscules : ainsi *j* désigne la mère de J, *t* la mère de T, et ainsi de suite.

Dressons maintenant un tableau. La ligne supérieure représente les hommes ; celle du bas, vide au départ, leur épouse. Que le beau-fils de Jenkins soit Tomkins signale que Mrs Jenkins est la mère de Tomkins, ce qui permet de marquer *t* sous J.

Homme	J	T	P	W	S
Épouse	*t*				

Nous savons aussi que Tomkins est le beau-père de Perkins, ce qui signifie que Mrs Tomkins est la mère de Perkins. Nous pouvons donc inscrire *p* sous T.

Homme	J	T	P	W	S
Épouse	*t*	*p*			

L'énoncé nous indique ensuite que la mère de Jenkins est une amie de Mrs Watkins. Nous savons donc que Mrs Watkins n'est pas la mère de Jenkins. Comme Mrs Watkins ne peut être la mère de Watkins, nous en déduisons par élimination qu'elle doit être la mère de Simkins.

Homme	J	T	P	W	S
Épouse	*t*	*p*		*s*	

L'énoncé dit finalement que la mère du mari de Mrs Watkins (c'est-à-dire la mère de Watkins) est cousine de Mrs Perkins. La femme de Perkins n'est donc pas la mère de Watkins. Elle ne peut donc plus être que la mère de Jenkins. Par élimination, la femme de Simkins doit être la mère de Watkins.

Homme	J	T	P	W	S
Épouse	*t*	*p*	*j*	*s*	*w*

Le beau-fils de Simkins est donc Watkins.

10. Le casse-tête du zèbre (p. 36)

Comme il s'agit d'un casse-tête à tableau, dessinons un tableau. Avec cinq maisons et cinq caractéristiques, il ressemblera peu ou prou à celui représenté plus bas.

Les cases se remplissent en examinant les différentes affirmations.

L'assertion 9 affirme que l'habitant de la maison du centre boit du lait : nous marquons donc *lait* dans la troisième colonne. 10 que le Danois habite la première maison : nous marquons donc *Danois* dans la première colonne. Et 15 que le Danois habite à côté de la maison bleue : nous marquons donc *bleue* dans la deuxième colonne.

	MAISON 1	MAISON 2	MAISON 3	MAISON 4	MAISON 5
COULEUR		Bleue			
NATIONALITÉ	Danois				
ANIMAL DE COMPAGNIE					
BOISSON			Lait		
CHAUSSURES					

En vertu de 6, la maison verte et la maison blanche sont voisines. La première maison ne peut donc être ni verte ni blanche. Mais elle ne peut pas non plus être rouge, car, selon 2, l'Écossais habite la maison rouge et nous savons que le Danois habite la première maison. Par élimination, nous en déduisons que la première maison est jaune. 8 nous informe que nous savons que celui qui y habite porte des souliers, et 12 qu'un cheval se trouve dans la deuxième maison.

	MAISON 1	MAISON 2	MAISON 3	MAISON 4	MAISON 5
COULEUR	Jaune	Bleue			
NATIONALITÉ	Danois				
ANIMAL DE COMPAGNIE		Cheval			
BOISSON			Lait		
CHAUSSURES	Souliers				

Que boit le Danois ? Pas du café à cause de 4, pas du thé à cause de 5, pas du lait à cause de 9 et pas du jus d'orange à cause de 13. Donc le Danois boit de l'eau.

Et qui habite la deuxième maison ? Pas l'Écossais, car la maison est bleue, ni le Grec, car il y a un cheval. Donc soit le Bolivien soit le Japonais. Mais si c'est le Japonais, que boirait-il ? Pas de l'eau, pas du lait, pas du café (à cause de 4)

et pas du thé (à cause de 5). Donc le Japonais boirait du jus d'orange. Mais alors, à cause de 13, il porterait des pantoufles, ce qui contredirait 14, qui affirme qu'il porte des tongs. Donc le Bolivien habite la deuxième maison, dans laquelle il boit du thé.

	MAISON 1	MAISON 2	MAISON 3	MAISON 4	MAISON 5
COULEUR	Jaune	Bleue			
NATIONALITÉ	Danois	Bolivien			
ANIMAL DE COMPAGNIE		Cheval			
BOISSON	**EAU**	Thé	Lait		
CHAUSSURES	Souliers				

Comme la maison verte et la maison blanche sont voisines en vertu de 6, la maison rouge est la troisième ou la cinquième. Supposons qu'il s'agisse de la cinquième. Alors l'Écossais y habite ; à cause de 4, il boit du jus d'orange et, en raison de 13, il porte des pantoufles. Mais si tel était le cas, qui porterait des bottes et élèverait des escargots ? Pas le Danois qui porte des souliers, ni le Bolivien qui a un cheval, ni le Grec qui, à cause de 3, a un chien, ni le Japonais qui, par 14, porte des tongs. Personne ne pourrait !

Nous en déduisons donc que la maison rouge de l'Écossais est la troisième puis, en raison de 6, que la quatrième et la cinquième maison sont respectivement la blanche et la verte. Comme le café se boit dans la cinquième maison en vertu de 4, le jus d'orange doit se boire dans la quatrième. Et suite à 13, les pantoufles se portent dans cette même quatrième.

	MAISON 1	MAISON 2	MAISON 3	MAISON 4	MAISON 5
COULEUR	Jaune	Bleue	Rouge	Blanche	Verte
NATIONALITÉ	Danois	Bolivien	Écossais		
ANIMAL DE COMPAGNIE		Cheval			
BOISSON	**EAU**	Thé	Lait	Jus d'orange	Café
CHAUSSURES	Souliers			Pantoufles	

Le Japonais doit habiter la cinquième maison puisque, portant des tongs en vertu de 14, il ne peut habiter la quatrième, où réside donc le Grec avec le chien.

	MAISON 1	MAISON 2	MAISON 3	MAISON 4	MAISON 5
COULEUR	Jaune	Bleue	Rouge	Blanche	Verte
NATIONALITÉ	Danois	Bolivien	Écossais	Grec	Japonais
ANIMAL DE COMPAGNIE		Cheval		Chien	
BOISSON	**EAU**	Thé	Lait	Jus d'orange	Café
CHAUSSURES	Souliers			Pantoufles	Tongs

Le reste du tableau se remplit maintenant presque de lui-même : l'éleveur d'escargots porteur de bottes doit être l'Écossais. Donc le Bolivien porte des sandales, et, à cause de 11, le Danois a un renard. La case restante doit être le zèbre qui appartient donc au Japonais.

	MAISON 1	MAISON 2	MAISON 3	MAISON 4	MAISON 5
COULEUR	Jaune	Bleue	Rouge	Blanche	Verte
NATIONALITÉ	Danois	Bolivien	Écossais	Grec	Japonais
ANIMAL DE COMPAGNIE	Renard	Cheval	Escargots	Chien	**ZÈBRE**
BOISSON	**EAU**	Thé	Lait	Jus d'orange	Café
CHAUSSURES	Souliers	Sandales	Bottes	Pantoufles	Tongs

Il y a d'autres voies pour remplir le tableau. Mais toutes mènent au même résultat !

11. Le testament de Caliban (p. 38)

D'emblée, on bute sur une difficulté : par quel bout prendre ce problème ? Rappelons les trois clauses :

1) Une personne qui a vu Caliban porter une cravate verte ne peut choisir avant Low ;

2) Si Y.Y. n'était pas à Oxford en 1920, le premier à choisir n'a jamais prêté de parapluie à Caliban ;

3) Si Y.Y. ou « Critic » est deuxième à choisir, « Critic » vient avant celui qui est tombé amoureux le premier.

Nous cherchons à trouver l'ordre dans lequel Low, Y. Y. et « Critic » doivent choisir les livres de Caliban. La clef tient à ce que chaque affirmation est nécessaire à la solution. En d'autres termes, ces assertions contiennent toutes une information pertinente. Si une information n'a pas servi à découvrir la solution, alors cette solution est fausse.

Pour que l'affirmation [1] soit utile à la résolution, Y.Y. et/ou « Critic » ont dû voir Caliban porter une cravate verte. Nous en déduisons que Low ne sera pas le dernier à choisir les livres, puisqu'il sera suivi de celui ou ceux qui ont vu Caliban porter une cravate verte.

Passons à l'affirmation suivante. Si Y.Y. était à Oxford, [2] ne donnerait aucune information sur l'ordre à trouver, ce qui nous permet d'affirmer que Y.Y. n'était pas à Oxford. Et si personne n'avait prêté de parapluie à Caliban, cette assertion serait encore superflue. Quelqu'un a donc prêté un parapluie à Caliban.

Qui a prêté un parapluie à Caliban ? Si c'était Low, alors, par [2], Low ne serait pas le premier à choisir. Comme nous savons par [1] qu'il n'est pas le dernier, il serait donc le deuxième. Mais si Low était le deuxième, alors [3] serait superflue, puisque pour être utile soit Y.Y soit « Critic » doit être deuxième. Donc Low n'a pas prêté de parapluie.

Si Y.Y et « Critic » avaient tous deux prêté un parapluie à Caliban, il suivrait de [2] que Low serait premier à choisir et que [1] ne servirait à rien. Donc soit Y.Y. soit « Critic » a prêté un parapluie à Caliban mais pas les deux. De la même façon, si Y.Y. et « Critic » avaient tous deux vu Caliban porter une cravate verte, il suivrait de [1] que Low serait premier et que [2] serait superflue. Donc soit Y.Y soit « Critic » a vu Caliban porter une cravate verte mais pas les deux.

Disons que Y.Y. a vu Caliban porter une cravate verte *et* lui a prêté un parapluie. D'après [1], Y.Y. ne pourrait pas être le premier, ce qui rendrait alors [2] superflue. Donc si Y.Y. a vu Caliban porter une cravate verte, il n'a pas pu lui prêter de parapluie, ce qui signifie que « Critic » a prêté un parapluie à Caliban. De même, si « Critic » a vu Caliban porter une cravate verte, par le même argument, Y.Y. a dû lui prêter un parapluie.

Dans les deux cas, Low doit être le premier à choisir. Et dans ce cas, par [3], Y.Y. doit être celui qui est tombé amoureux le premier. L'ordre final est donc : Low, « Critic » et Y.Y.

12. Le truel (p. 39)

Ce truel est un bijou de logique. Il aboutit à un résultat aussi brillant et contre-intuitif que pacifique, à savoir que pour optimiser ses chances de survie le Truand doit commencer par ne tuer personne.

Le Truand ne doit certainement pas tirer sur la Brute. S'il la tue, le Bon tuera le Truand avec une certitude de 100 %. Adios !

Et si, dans le but d'éliminer le plus dangereux d'entrée, le Truand tirait sur le Bon ? Si le Truand tue le Bon, le Truand et la Brute devront alors se battre en eux. Dans ce scénario, même si le Truand ne voit pas sa mort assurée, les probabilités sont tout de même sensiblement contre lui. Non seulement la Brute vise mieux que lui, mais en plus il tirera le premier. Ses chances de survie sont en fait de 1/7 ou 14 %.

(Ce résultat s'obtient en calculant que la probabilité pour la Brute de gagner en un coup vaut 2/3, en deux coups (⅔)(⅓)(⅔), en trois coups (⅔)(⅓)(⅔)(⅓)(⅔) et ainsi de suite. La somme de cette suite infinie de probabilités donne 6/7. Les chances de survie du Truand valent donc 1/7.)

Si le Truand rate le Bon, c'est ensuite au tour de la Brute de tirer et il visera le Bon, avec 2/3 de chances de le descendre. S'il réussit, nous sommes de retour à la situation précédente, avec cette différence que le Truand tirera cette fois le premier. Ses chances de gagner sont alors un peu supérieures à 1/3 – en l'occurrence 3/7 ou 43 %. Si la Brute rate le Bon, le Bon tuera la Bête au prochain tir, puis il y aura ensuite duel entre le Truand et le Bon, le Truand tirant le premier. Ces chances de survie valent exactement 1/3.

En d'autres termes, le Truand a intérêt à rater ses deux adversaires plutôt qu'à en tuer un. Sa meilleure action consiste donc à tirer en l'air.

En procédant ainsi, il a même les meilleures chances de survie de tous. Je vous épargne ici les calculs de probabilités, mais les chances de rester debout seraient de 40 % pour le Truand, contre 38 % pour la Brute et seulement 22 % pour le Bon.

Morale de l'histoire : laisser autant que possible les meilleurs se battre entre eux !

13. Pommes et oranges (p. 40)

Nous faisons donc face à trois boîtes, respectivement étiquetées « pommes », « oranges » et « pommes et oranges », et nous ne pouvons tirer qu'un seul fruit de l'une d'entre elles.

Explorons les différentes possibilités selon le fruit tiré dans chacune des boîtes. Disons que nous choisissons le carton marqué « pommes ». Si nous tirons une pomme, nous savons que le carton doit contenir des pommes et des oranges. Il ne peut contenir que des pommes car les étiquettes sont fausses et l'étiquette dit « pommes ». Il nous reste alors deux boîtes, étiquetées « oranges » et « pommes et oranges », et deux contenus possibles : que des oranges et que des pommes. Comme la boîte marquée « oranges » ne peut pas contenir d'oranges, elle doit contenir des pommes. Il reste donc la boîte « pommes et oranges » qui doit contenir des oranges. Et nous avons correctement déterminé le contenu des trois boîtes. Hourrah ! Le problème est résolu.

Mais en fait, non… Comme nous avons choisi de tirer un fruit de la boîte « pommes », nous aurions aussi pu tirer une orange. Et si nous tirons une orange du carton étiqueté « pommes », alors ce carton contient soit seulement des pommes, soit des pommes et des oranges. Dans ce cas, nous n'avons aucun moyen de savoir quelle option est la bonne.

De la même façon, si nous choisissons de tirer un fruit du carton étiqueté « oranges » et que ce fruit est une pomme, nous n'avons aucun moyen de déterminer la boîte qui contient seulement des oranges et celle qui contient des pommes et des oranges.

La solution consiste donc à choisir de tirer un fruit de la boîte étiquetée « pommes et oranges ». En fait, vous l'avez déjà peut-être déduit sans passer par le paragraphe précédent. Si une énigme admet une seule solution parmi trois possibles, et que deux d'entre elles sont interchangeables, comme ici en permutant « pommes » et « oranges », alors la solution doit suivre de celle qui reste.

Nous tirons donc un fruit du carton « pommes et oranges ». Si c'est une pomme, nous savons que la boîte doit seulement contenir des pommes. Il nous reste les boîtes étiquetées « pommes » et « oranges », qui contiennent pour l'une des oranges et pour l'autre des pommes et des oranges. La boîte étiquetée « oranges » ne peut pas contenir que des oranges, elle contient de ce fait des pommes et des oranges. La boîte « pommes » ne contient donc que des oranges. Nous pouvons ainsi correctement associer les étiquettes aux boîtes. Nous aurions tout aussi bien pu le faire si nous avions tiré une orange de la boîte « pommes et oranges » : par un raisonnement identique en permutant simplement pommes et oranges.

14. Sel, poivre et vinaigrette (p. 40)

Il nous faut d'abord établir l'identité de l'homme, dont nous savons par l'énoncé qu'il ne tient pas la vinaigrette. S'il s'agit de Steph, il ne tient pas non plus le sel du fait de son patronyme, donc il tient le poivre. Or Vic ne peut pas tenir la vinaigrette en raison de son patronyme, et ne peut

pas non plus tenir le sel, du fait que sa ligne de dialogue fait suite à celle de son détenteur. Donc Vic doit tout comme Steph tenir le poivre, ce qui forme une contradiction.

Alors Phil serait-il l'homme ? Après tout, Phil est le diminutif de Philippe, un prénom bien masculin. Là encore, pourtant, ce choix aboutit à une contradiction. Du dialogue, nous savons en effet que l'homme *ne peut pas* tenir le sel, puisque son détenteur lui répond. Si Phil est l'homme, il ne peut donc pas tenir le sel, pas plus que le poivre, qui correspond à son patronyme. Il doit donc tenir la vinaigrette, option par ailleurs impossible, l'énoncé précisant que l'homme ne tient pas la vinaigrette.

Par élimination, Vic doit être l'homme. L'homme ne peut pas tenir le sel, donc il tient le poivre. Steph doit donc tenir la vinaigrette et Phil le sel.

Si cela vous intéresse, sachez que Steph est le diminutif de Stéphanie, et Phil le diminutif de Philippine, un très joli prénom féminin !

15. Pierre, papier, ciseaux (p. 41)

Adam a choisi les ciseaux six fois. Comme il n'y a jamais eu d'égalité, chacun de ces ciseaux doit correspondre à pierre ou papier du côté d'Ève. Comme celle-ci a joué deux fois pierre et quatre fois papier, elle a joué pierre ou papier à chaque fois qu'Adam a joué ciseaux. Les ciseaux d'Adam ont perdu deux fois (contre la pierre) et gagné quatre fois (contre le papier). Score à ce stade : 4 pour Adam contre 2 pour Ève.

Sur les quatre coups restants, Ève a toujours joué ciseaux quand Adam a joué trois fois pierre et une fois papier. Score ici : 3 pour Adam contre 1 pour Ève.

Score total : 7 pour Adam contre 3 pour Ève.

Adam a gagné.

17. Trois visages tachés de suie (p. 45)

Miss Atkinson suppose que son visage est propre et que les deux autres passagers rient l'un de l'autre. (Disons que le premier se trouve à gauche et l'autre à droite.) Miss Atkinson se glisse alors dans l'esprit d'un des passagers, disons celui de gauche. Il peut voir le passager de droite, au visage couvert de suie, et Miss Atkinson, au visage propre. Donc le passager de gauche rit en raison du visage noirci du passager de droite. Mais pourquoi, pense alors Miss Atkinson, le passager de gauche croit-il que le passager de droite rit ? Le passager de gauche supposant que son propre visage est net, de qui se moque le passager de droite ? Miss Atkinson comprend la réalité très déplaisante de la seule possibilité ouverte : il doit rire d'elle ! Elle sort immédiatement son mouchoir et se nettoie le visage.

18. Quarante maris infidèles (p. 46)

Si vous avez résolu les deux problèmes précédents, ou du moins suivi leur solution, il ne vous reste qu'un petit pas à franchir pour venir à bout de celui-ci. Vous avez peut-être remarqué que tous ces casse-tête forment des variations sur un même thème : le premier met en scène deux fillettes, le deuxième trois passagers et celui-ci quarante épouses.

La dernière énigme s'obtient de fait à partir de la première en portant le nombre de protagonistes de deux à quarante, en remplaçant en gros « a le visage taché de boue » par « a un mari infidèle » et « avance d'un pas » par « exécute son mari ».

Le caractère particulièrement brillant de la formulation tient à ce que l'information fournie par un observateur selon laquelle « au moins un mari est infidèle » semble sans

conséquence, et même redondante, puisque les épouses savent déjà qu'au moins l'un des maris est infidèle : elles connaissent même trente-neuf mufles avérés. Cette information déclenche pourtant une cascade d'événements remarquables.

Le casse-tête des visages boueux s'était clos sur les deux fillettes qui avançaient d'un pas quand elles comprenaient qu'elles avaient toutes deux le visage taché. Celui-ci s'achève sur une scène d'horreur : le massacre simultané des quarante maris infidèles par les quarante épouses.

Comment arrive-t-on à cette conclusion ? Imaginons ce qui se passerait si un seul des maris trompait sa femme et que les trente-neuf étaient fidèles. Pour l'unique épouse trompée, il n'y aurait aucun mari infidèle en ville, d'abord parce que toutes les épouses supposent leur mari fidèle, ensuite parce que, dans ce cas précis, elle sait que tous les autres maris sont fidèles. Le jour où le monarque annonce qu'au moins un mari est infidèle, elle comprend donc que c'est le sien – car ce ne peut être aucun autre. Elle l'exécute donc à midi le jour suivant.

Imaginons maintenant que la ville compte deux maris infidèles. Leurs épouses, appelons-les Agnès et Berta, n'ont chacune connaissance que d'un cas, puisque toutes les épouses ignorent l'infidélité de leur propre mari. Ainsi : Agnès sait que le mari de Berta est infidèle ; Berta sait que le mari d'Agnès est infidèle ; les trente-huit autres femmes savent que les maris d'Agnès et Berta sont infidèles. Comme toutes les femmes ont au moins connaissance d'un cas d'adultère, la quiétude de la ville n'est pas troublée quand le monarque annonce « qu'au moins un mari est infidèle » et le jour suivant se passe sans effusion de sang.

Dans l'après-midi de ce jour suivant, toutefois, Agnès et Berta s'interrogent. Si, comme Agnès le pensait, le mari de Berta avait été le seul mari infidèle de la ville, Berta aurait

dû le tuer à midi, après avoir entendu que la ville comptait au moins un mari infidèle. Le fait que Berta n'ait pas tué son mari amène Agnès à conclure que Berta doit avoir connaissance d'un autre mari adultère. Et qui pourrait-il être ? Aucun mari à part le sien ! Le jour suivant à midi, Agnès exécute donc son mari – tout comme Berta, qui a suivi un raisonnement similaire de son côté, exécute le sien. Si la ville compte deux maris infidèles, ces derniers sont exécutés deux jours après l'annonce assurant « qu'au moins un mari est infidèle ».

Le scénario pourrait se poursuivre avec trois maris infidèles. Chacune des épouses croirait que la ville compte seulement deux maris infidèles, puis, le deuxième jour étant passé sans mort d'homme, les fusils se chargeraient. Ces trois femmes tueraient leur mari le troisième jour. Pour aller directement au but, si la ville compte quarante maris infidèles, rien ne se passe jusqu'à un bain de sang général, le quarantième jour.

Si le monarque avait omis de mentionner que la ville comptait au moins un mari adultère, l'argument logique n'aurait pu être tenu et il n'y aurait pas eu de massacre.

19. Carton à chapeaux (p. 47)

La seule façon pour Algernon de connaître la couleur de son chapeau consiste à voir deux chapeaux verts sur la tête des autres, et dans ce cas de porter un chapeau rouge. Indiquant ne pas connaître la couleur de son chapeau, il doit donc voir sur la tête des autres soit deux chapeaux rouges soit un vert et un rouge.

Pour les mêmes raisons, Balthazar doit aussi voir soit deux chapeaux rouges, soit un vert et un rouge. À ce stade de nos progrès, nous avons établi les options suivantes :

1) tout le monde porte un chapeau rouge ;
2) Algernon et Balthazar portent les chapeaux verts ;
3) seul Caractacus porte un chapeau vert.

Comme l'énoncé précise que Caractacus ne voit que des chapeaux rouges, nous pouvons éliminer [2]. Imaginons maintenant que la proposition [3] est vraie, c'est-à-dire que seul Caractacus porte un chapeau vert, et revenons à l'énoncé. Algernon, voyant un chapeau vert et un chapeau rouge, conclurait bien qu'il ne connaît pas la couleur de son chapeau. Balthazar voyant le chapeau vert de Caractacus et entendant Algernon affirmer ne pas connaître la couleur de son chapeau, éliminerait la possibilité de porter lui-même un chapeau vert – autrement Algernon aurait su la couleur de son propre chapeau. Balthazar saurait donc qu'il porte un chapeau rouge et *n'aurait pas pu* dans ce cas prétendre ne pas connaître la couleur de son chapeau. Comme l'hypothèse [3] mène à une contradiction, c'est l'hypothèse [1] qui est vraie. Caractacus porte donc un chapeau rouge.

20. Nombres consécutifs (p. 48)

Les informations indiquées dans les lignes de dialogue permettent de réduire petit à petit l'ensemble des nombres qu'a pu choisir Zébédée jusqu'à trouver la solution.

Ces nombres figurent dans la liste : 1, 2, 3, 4, 5,… Comme Xanthe sait que les deux nombres sont consécutifs, si 1 lui avait été murmuré, elle saurait que 2 aurait été murmuré à Yvette, ce qui contredirait la première ligne de dialogue. Donc 1 n'a pas été murmuré à Xanthe. Si 2 lui avait été murmuré, elle ne pourrait pas connaître le nombre d'Yvette, en l'occurrence 1 ou 3. De même pour tous les nombres supérieurs à 2, puisque le nombre d'Yvette peut être ce nombre augmenté ou diminué d'une unité. De la première

ligne de dialogue, nous déduisons donc que le nombre Xanthe est supérieur ou égal à 2.

Le nombre d'Yvette ne peut être 1 pour la même raison que précédemment. Et 2 ? Elle saurait dans ce cas que le nombre de Xanthe est 1 ou 3. Mais en parfaite logicienne, elle a déduit comme nous plus haut que le nombre Xanthe n'était pas 1. Si le nombre d'Yvette était le 2, celui de Xanthe serait le 3, ce qui contredirait la deuxième ligne de dialogue, laquelle affirme qu'Yvette ne connaît pas le nombre de Xanthe. Nous pouvons retirer 2 de la liste d'Yvette. Si le nombre d'Yvette est 3 ou plus, elle dit vrai en affirmant ne pas connaître le nombre de Xanthe, puisque ce nombre peut être supérieur ou inférieur d'une unité.

Pour récapituler, nous savons désormais que le nombre de Xanthe se trouve parmi 2, 3, 4, 5, 6,… et celui d'Yvette parmi 3, 4, 5, 6, 7,…

Xanthe affirme ensuite connaître le nombre d'Yvette. Si son propre nombre est 2, elle sait que celui d'Yvette est 3. Si son propre nombre est 3, elle sait que celui d'Yvette est 4. Mais si son propre nombre était 4, celui d'Yvette pourrait être le 3 ou le 5, et l'affirmation de Xanthe serait fausse. Et de même pour tous les nombres supérieurs à 4. En d'autres termes, pour prétendre connaître le nombre d'Yvette, Xanthe doit elle-même avoir 2 ou 3 pour nombre.

Comme les nombres de Zébédée sont consécutifs, si le nombre de Xanthe est 2 ou 3, celui d'Yvette est 3 ou 4. Donc Zébédée a murmuré soit 2 et 3 soit 3 et 4 à l'oreille de ses amies. Conclusion : 3 a sûrement été choisi par Zébédée !

21. L'anniversaire de Cheryl (p. 49)

Après avoir listé les dates potentielles de son anniversaire, Cheryl indique d'une part à Albert le mois, qui peut être

mai, juin ou juillet, et d'autre part à Bernard le jour, qui peut être le 14, 15, 16, 17, 18 ou 19. L'information tirée des lignes de dialogue permet d'éliminer progressivement des mois ou des jours jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une date possible.

Albert dit d'abord qu'il ne connaît pas la date de Cheryl mais qu'il sait aussi que Bernard ne la connaît pas.

Comme chaque mois apparaît au moins deux fois dans la liste de dates, quelle que soit la précision apportée par Cheryl à Albert, il y a au moins deux choix de jour possibles. Bien sûr, donc, qu'Albert ne connaît pas la date de l'anniversaire de Cheryl. Cette première partie de l'affirmation est redondante.

Pour qu'Albert sache que Bernard ne connaisse pas non plus la date, il doit toutefois savoir que ce dernier a reçu confidence d'un jour qui apparaît plusieurs fois dans la liste, c'est-à-dire le 14, 15, 16 ou 17, mais pas le 18 ou 19. Si Bernard savait que l'anniversaire se fêtait le 18 ou le 19, il aurait pu déduire la date de l'anniversaire de Cheryl, en l'occurrence le 18 juin ou le 19 mai. Et la seule façon pour Albert de savoir si Cheryl n'a pas soufflé à Bernard le 18 ou le 19, c'est qu'il ait lui-même reçu confidence d'un mois sans l'option du 18 ni du 19. Nous pouvons donc éliminer les mois de mai et juin. Albert a ainsi reçu confidence des mois de juillet ou août.

Bernard dit alors qu'il ne connaît pas la date de l'anniversaire de Cheryl, confirmant par là qu'il ne s'agit ni du 18 ni du 19, puis ajoute qu'il la connaît désormais. Pour être en état d'affirmer pareille vérité, il doit avoir reçu confidence d'un jour associé à un unique mois. Nous pouvons ainsi éliminer le 14, commun à juillet et août. Bernard a donc reçu confidence du 15, du 16 ou du 17.

Reste à ce stade pour dates possibles le 16 juillet, le 15 août et le 17 août.

Comme Albert indique ensuite qu'il connaît lui aussi la date de l'anniversaire, il doit avoir reçu confidence d'un mois correspondant à un seul jour. La réponse cherchée est donc le 16 juillet.

Si le 16 juillet constitue bien la réponse correcte attendue, une interprétation différente de l'énoncé conduit à la date du 17 août. Le débat en ligne sur l'approche la plus correcte contribua probablement pour partie à la diffusion et à la notoriété du casse-tête. Pour clore la discussion, les autorités officielles qui avaient proposé le problème, les *Singapore and Asian Schools Math Olympiad*, ont publiquement clarifié la question et déclaré la solution du 17 août fausse.

L'aboutissement à la date alternative montre de façon exemplaire que les énigmes logiques peuvent souvent s'entendre différemment et rappelle à quel point il faut être vigilant sur ce qui est censé être connu ou non. Voici le second cheminement :

Albert commence par dire qu'il ne connaît pas la date de l'anniversaire de Cheryl, mais qu'il *sait* que Bernard ne la connaît pas non plus. Si vous supposez, comme nous plus haut, qu'Albert sait cette information sur Bernard parce qu'il l'a déduite, alors vous tombez sur la réponse du 16 juillet. Mais peut-être qu'Albert a appris l'ignorance de Bernard par une tout autre voie, non précisée.

Dans ce cas, Albert peut éliminer les dates tombant un 18 et un 19 avant de démarrer. Quand Albert dit ensuite qu'il ne connaît pas la date d'anniversaire, il révèle qu'il n'a pas reçu confidence de juin, car ce mois n'apparaît qu'une seule fois parmi les dates qui restent. Nous pouvons alors éliminer juin. Mais, contrairement au scénario précédent, le mois de mai ne peut s'éliminer. Le dialogue se poursuit avec Bernard qui indique qu'il ne savait pas la date mais qu'il la détient désormais. Pour qu'il la connaisse, il doit avoir un

jour qui n'apparaît qu'une fois parmi les possibilités restantes : 15 et 16 mai, et 14, 15 et 17 août. Le nombre 17 apparaît seulement une fois, donc la réponse est le 17 août.

22. L'anniversaire de Denise (p. 52)

Ce problème se résout de la même façon que le précédent, en éliminant toujours plus de dates grâce aux informations fournies par l'énoncé. Plus emberlificoté, toutefois, il défie nos capacités à penser simultanément dans différentes directions.

Rappelons les dates possibles :

17 février 2001	16 mars 2002	13 janvier 2003	19 janvier 2004
13 mars 2001	15 avril 2002	16 février 2003	18 février 2004
13 avril 2001	14 mai 2002	14 mars 2003	19 mai 2004
15 mai 2001	12 juin 2002	11 avril 2003	14 juillet 2004
17 juin 2001	16 août 2002	16 juillet 2003	18 août 2004

Albert, qui connaît le mois, sait que Bernard, qui connaît le jour, ne connaît pas la date exacte. Il est donc possible d'éliminer les dates dont les jours n'apparaissent qu'une seule fois dans la liste, soit le 11 avril 2003 et le 12 juin 2002.

Vous pouvez les barrer au crayon si cela vous aide.

Comme Albert sait que le mois n'est ni avril ni juin, vous pouvez également barrer les autres dates comportant ce mois : 13 avril 2001, 15 avril 2002 et 17 juin 2001.

Bernard, qui sait le jour, ne connaît toujours pas l'anniversaire de Denise : nous pouvons donc éliminer, parmi les dates qui restent, celles dont les jours n'apparaissent qu'une seule fois – autrement Bernard saurait quand se fête l'anniversaire de Denise. Seuls les jours du 15 et du 17 apparaissent une fois, associés aux dates des 15 mai 2001 et 17 février 2001, que nous barrons impitoyablement.

Mais Bernard sait aussi que Cheryl, à qui on a appris l'année, ne connaît pas la date exacte de l'anniversaire de Denise. Cheryl n'a donc pas reçu confidence de l'année 2001, la seule à correspondre à une date unique, celle du 13 mars 2001 ; de même Bernard d'un 13. Exit donc le 13 mars 2001 et le 13 janvier 2003.

Le fait que Cheryl ne connaisse toujours pas la date d'anniversaire ne nous donne pas d'information nouvelle, mais qu'elle sache qu'Albert ne le connaisse toujours pas non plus signale qu'Albert a reçu confidence d'un mois qui apparaît plusieurs fois dans la liste des possibilités restantes. Le seul mois qui apparaisse une unique fois est janvier, dans la date du 19 janvier 2004, ce qui signifie que Cheryl n'a pas reçu confidence de l'année 2004. Nous pouvons donc éliminer toutes les dates de cette année-là.

Albert connaît maintenant la date : le mois doit figurer une seule fois parmi les options restantes, ce qui permet de barrer les deux dates en mars.

Restent à ce stade les dates du 14 mai 2002, du 16 août 2002, du 16 février 2003 et du 16 juillet 2003.

Si maintenant Bernard connaît aussi la date d'anniversaire, le jour doit apparaître une unique fois parmi les dates restantes. L'anniversaire de Denise se fête donc le 14 mai 2002.

23. Les âges des enfants (p. 53)

Le bedeau a trois enfants dont le produit des âges vaut 36. Les âges possibles se réduisent donc aux combinaisons présentées dans le tableau ci-dessous. La dernière colonne affiche d'autre part en gras la somme des âges.

1 × 1 × 36	**38**
1 × 2 × 18	**21**
1 × 4 × 9	**14**
1 × 6 × 6	**13**
2 × 2 × 9	**13**
2 × 3 × 6	**11**
3 × 1 × 12	**16**
3 × 3 × 4	**10**

Nous pouvons supposer que le vicaire connaît, ou sait trouver, le numéro de la maison du bedeau. Si ce numéro était un nombre qui ne figurait qu'une fois dans la dernière colonne du tableau précédent, le vicaire déterminerait sur le champ l'âge des enfants. Mais ce n'est pas le cas. Nous en déduisons que ce numéro est le 13, unique numéro à apparaître plusieurs fois, et que les âges sont 1, 6 et 6 (première possibilité) ou 2, 2 et 9 (seconde possibilité).

Le vicaire sait évidemment l'âge de son fils, et nous pouvons supposer que le bedeau le connaît aussi. Comme le bedeau précise au vicaire que cet élément d'information suffit à déterminer les âges, le fils du vicaire doit être d'une part plus âgé que tous les enfants de l'une des possibilités, mais d'autre part plus jeune qu'au moins un des enfants de l'autre possibilité. Ainsi, le fils du vicaire *doit* avoir 7 ou 8 ans. Si le fils du vicaire était âgé de disons 10 ou 11 ans, comme ce fils serait plus âgé que tous les enfants dans les deux possibilités, le bedeau ne pourrait pas soutenir que le vicaire est maintenant en état de trouver la solution. Et si le fils du vicaire est âgé de 7 ou 8 ans, les enfants du bedeau sont âgés de 1, 6 et 6 ans.

24. Des génies dans un bus (p. 54)

Nous savons que l'homme A a plus d'un enfant, que les âges de ces enfants sont des nombres entiers strictement positifs, dont la somme fait le numéro du bus. Nous savons aussi que l'homme n'a pas plus d'un enfant de 1 an.

Fort de ces informations, testons les différents numéros de bus.

Le bus ne peut porter le numéro 1, car la somme de deux nombres entiers strictement positifs ne peut faire 1.

Le bus ne peut pas porter le numéro 2, parce que d'une part les deux seuls entiers strictement positifs dont la somme fait 1 sont 1 et 1, et parce que d'autre part l'homme a un seul enfant de 1 an.

Si le bus porte le numéro 3, les seuls nombres entiers strictement positifs dont la somme fait 3 sont 2 + 1 ou 1 + 1 + 1. La dernière possibilité est exclue, car A aurait autrement trois enfants de 1 an, de même que la première : si le bus portait le numéro 3 et si A disait à B qu'il a deux enfants, B aurait immédiatement pu déterminer leur âge, en l'occurrence 1 et 2 ans. Donc le bus ne porte pas le numéro 3.

Le tableau ci-dessous dresse la liste de toutes les combinaisons d'âges possibles quand le bus porte le numéro 4, hormis celles formées de plus d'un 1. La somme des âges des enfants donne le numéro du bus. Pour chaque combinaison, j'ai également indiqué le nombre d'enfants et l'âge de chaque homme.

Bus numéro 4

Âges des enfants	Nombre d'enfants	Âge du père
3, 1	2	3
2, 2	2	4
4	1	4

Si A disait à B son nombre d'enfants (deuxième colonne) et son âge (troisième colonne), il dirait 2 et 3, 2 et 4 ou 1 et 4. Dans tous les cas, chaque couple étant unique, B pourrait déduire les âges des enfants. Donc A ne répondrait pas « non » à la question de B.

Comme la connaissance du nombre d'enfants et de l'âge de A ne suffit pas à B pour déterminer les âges des enfants, nous recherchons finalement un numéro de bus dont le tableau correspondant porte en deuxième et troisième colonnes des mêmes nombres sur des lignes différentes.

Le génie de Conway dans la conception de ce casse-tête a été de remarquer qu'il n'y avait qu'une seule solution ! Un seul numéro de bus correspondant à des couples deuxième colonne/troisième colonne identiques.

Poursuivons le cheminement jusqu'à trouver le bon bus :

Bus numéro 5

Âges des enfants	Nombre d'enfants	Âge du père
5	1	5
4, 1	2	4
3, 2	2	6
2, 2, 1	3	4

Rien ici.

Bus numéro 6

Âges des enfants	Nombre d'enfants	Âge du père
6	1	6
5, 1	2	5
4, 2	2	8
3, 2, 1	3	6
2, 2, 2	3	8

Rien là non plus.

Bon, vous avez saisi. En continuant, nous arrivons à :

Bus numéro 12

Âges des enfants	Nombre d'enfants	Âge du père
12	1	12
11, 1	2	11
10, 2	2	20
9, 3	2	27
9, 2, 1	3	18
8, 4	2	32
8, 3, 1	3	24
8, 2, 2	3	32
7, 5	2	35
7, 4, 1	3	28
7, 3, 2	3	42
7, 2, 2, 1	4	28
6, 6	2	36
6, 5, 1	3	30
6, 4, 2	3	48
6, 3, 3	3	54
6, 3, 2,1	4	36
6, 2, 2, 2	**4**	**48**
5, 5, 2	3	50
5, 4, 3	3	60
5, 4, 2, 1	4	40
5, 3, 3, 1	4	45
5, 3, 2, 2	4	60
5, 2, 2, 2, 1	5	40
4, 4, 4	3	64
4, 4, 3, 1	**4**	**48**
4, 4, 2, 2	4	64
4, 3, 3, 2	4	72
4, 3, 2, 2, 1	5	48
4, 2, 2, 2, 2	5	64
3, 3, 3, 3	4	81
3, 3, 3, 2, 1	5	54
3, 3, 2, 2, 2	5	72
3, 2, 2, 2, 2, 1	6	48
2, 2, 2, 2, 2, 2	6	64

La chose nous a demandé un certain effort, mais nous avons finalement trouvé ce que nous cherchions. J'ai marqué en gras les nombres concernés.

Quand bien même B saurait que A a quatre enfants et que le produit de leur âge fait 48, il ne disposerait pas de suffisamment d'information pour déterminer les âges en question. B ferait face à deux options : 6, 2, 2 et 2 ans ou 4, 4, 3 et 1 an.

Comme B sait qu'il ne peut déduire les âges, il comprend que le A doit avoir 48 ans.

Et nous savons que le bus porte le numéro 12 !

(Comme j'ai précisé que le bus porte un seul numéro possible, maintenant que nous l'avons trouvé, le problème est résolu. Prouver qu'il ne peut pas s'agir du numéro 13 ou plus dépasse nettement le niveau de ce livre. Les curieux pourront prendre connaissance de la démonstration en ligne.)

25. Jeu de voyelles (p. 55)

La carte A et la carte 2.

Il faut clairement retourner la carte A pour vérifier qu'elle porte un nombre impair sur l'autre face. Il n'y a pas lieu de retourner la carte B, car B est une consonne, type de lettres qui ne nous concerne pas.

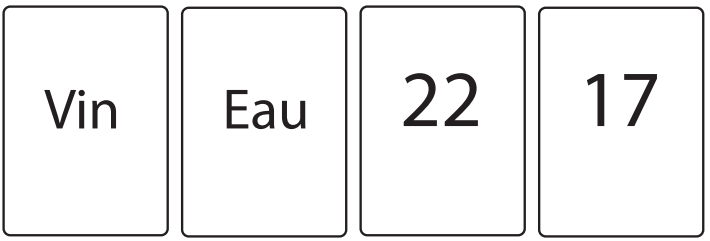
La plupart des gens se trompent en estimant devoir retourner la carte 1, du fait que 1 est impair, afin de vérifier qu'elle porte une voyelle sur l'autre face. La règle est certes confirmée si cet autre côté présente une voyelle, mais qu'il présente une consonne importe peu puisque la règle ne s'applique pas à ce type de lettres.

Il faut en fait retourner la carte 2, afin de nous assurer qu'elle ne porte pas de voyelle sur l'autre face : s'il s'en trouvait une, la règle serait violée.

Le psychologue Peter Watson a proposé ce casse-tête en 1966. La plupart des gens se trompent tout en comprenant parfaitement la question. Il est en fait très facile de tomber dans le piège consistant à raisonner à partir de ce que l'on

connaît – le nombre impair visible – et non de ce que l'on ne connaît pas – ce que porte la face invisible. Nos cerveaux paresseux ne sont pas conçus pour résoudre des énigmes logiques !

Il suffit de formuler le casse-tête différemment, dans un contexte familier, pour que la plupart des gens donnent la bonne réponse. Les cartes qui suivent présentent toutes une boisson sur une face et un nombre sur l'autre. Chaque carte représente une personne. Le nombre correspond à son âge et à sa boisson préférée.



Quelles cartes suffit-il de retourner pour vérifier la validité de l'assertion suivante : « Une personne qui boit de l'alcool a plus de 18 ans. »

Il faut clairement retourner la carte Vin. Mais il est désormais bien plus évident qu'il faille aussi retourner la carte 17, afin de savoir ce que cette personne boit. Pourquoi retourner la carte 22 alors qu'une personne de cet âge peut boire ce qu'elle veut ?

En guise d'apéritif. *Êes-vous un génie en jeux de lettres ?* (p. 58)

1) **B**ANAN**E**

2) APITOIERAI. (L'énoncé ne demande pas d'utiliser *toutes* les lettres : certaines peuvent être utilisées plusieurs fois.)

3) **A**TOMI**SER**

4) **J**uin **J**uillet **A**oût **S**eptembre **O**ctobre **N**ovembre **D**écembre **J**anvier **F**évrier **M**ars **A**vril **M**ai

5) **EXT**RAORD**INAIRE**

6) T pour Trente : la suite est constituée de la première lettre des nombres compris entre 14 et 29.

7) **PI**CV**ERT**

8) Privés de leur première lettre, ces mots forment des palindromes, c'est-à-dire des chaînes de caractères qui demeurent identiques quand elles sont lues dans les deux sens : asse, anona, rever, resser, eue, essasse, elle, erre.

9) **INS**TANTAN**ÉMENT**

10) I. Toujours penser aux jours de la semaine devant une suite à sept termes : l**u**ndi, m**a**rdi, m**e**rcredi, j**e**udi, v**e**ndredi, s**a**medi, d**i**manche.

26. À la règle seule (p. 63)

Une règle permet de tracer des droites. Une règle portant un intervalle de deux unités permet de tracer des droites *et* de marquer des intervalles de deux unités. Cela suffit à résoudre le problème qui nous préoccupe.

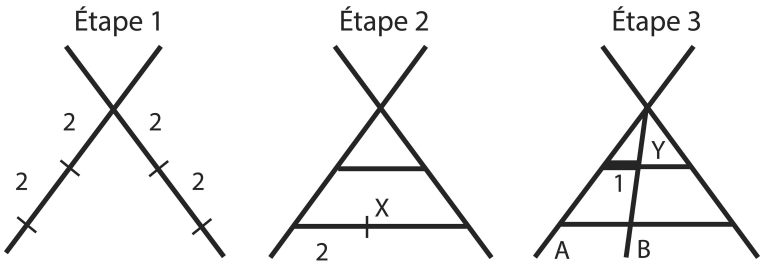
Notre solution repose sur le fait que deux droites tracées à partir d'un même point divergent à taux constant. Nous cherchons donc un moyen de mesurer la distance entre deux droites divergentes qui nous permette de tracer un segment long d'une unité. En voici un :

Étape 1. Tracer deux droites concourantes – nos droites divergentes, voyez les diagrammes ci-dessous. Marquer les points situés à deux unités de l'intersection de ces droites. Partant de ces nouveaux points, noter les points situés deux unités encore plus loin.

Étape 2. Joignez les deux premiers points par une droite, puis les seconds par une autre. Ces droites sont parallèles. Marquer d'un X le point situé à deux unités de la droite inférieure.

Étape 3. Tracer une droite de l'intersection à X. Marquer d'un Y le point où elle coupe la parallèle supérieure. La distance mesurée sur cette parallèle jusqu'à Y, représentée en gras sur l'illustration ci-dessous, vaut une unité. Nous avons trouvé ce que nous cherchions.

Pourquoi est-ce que ça marche ? Appelons A l'une des droites originales et B la dernière tracée. La distance de A à B à leur intersection est nulle. En nous déplaçant régulièrement sur B, la distance de A à B mesurée sur toute droite formant un angle constant augmente à taux constant. Dès lors, si une droite joignant A à B en X mesure deux unités, la droite parallèle joignant A à B en Y, ici à mi-chemin, doit mesurer une unité.

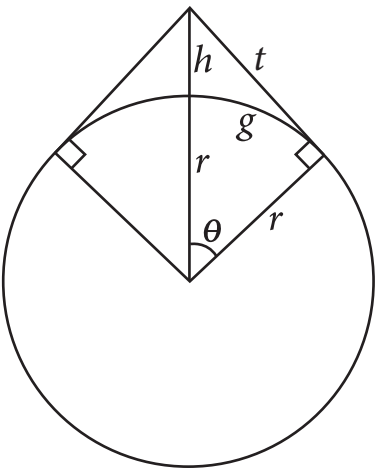


27. La corde autour de la Terre (Nouveau problème) (p. 65)

La corde peut être levée à 120 m, ce qui correspond à peu près à la hauteur du gratte-ciel Centre Point à Londres. Là encore, ce résultat énorme heurte l'intuition. Une corde de 40 000 km autour de la Terre prolongée jusqu'à

40 000,001 km peut être levée pour laisser facilement passer une pyramide de vingt étages de girafes montée sur des motocyclettes.

Avec cette différence, toutefois, que la dimension de la Terre compte ici pour beaucoup dans le problème. Le calcul demande des connaissances en trigonométrie qui dépassent le niveau mathématique visé par ce livre. Alors note maximale si vous avez su correctement illustrer la question et ne serait-ce que songer à un moyen d'y répondre. Dans le diagramme ci-dessous, r désigne le rayon de la Terre et h la hauteur recherchée, celle de la corde une fois qu'elle est élevée aussi haut que possible sans l'étirer. La longueur de la corde du sommet au sol est notée t, tandis que deux fois g désigne la distance sous elle le long du sol.



Il est possible d'exprimer h en fonction de r, mais j'aime autant prévenir que ce n'est pas joli. Et n'essayez même pas de suivre si vous n'avez jamais étudié la trigonométrie. Notez d'abord que t est une *tangente* d'un rayon, de sorte qu'apparaît un triangle rectangle formé de l'hypoténuse $r + h$

et des deux autres côtés r et t. Par le théorème de Pythagore :

[1] $t^2 + r^2 = (r + h)^2$

Sachant que le cosinus d'un angle θ vaut $r/(r + h)$, nous obtenons :

[2] $\theta = \cos^{-1} r/(r + h)$

Comme nous travaillons en radians, $\theta r = g$, d'où :

[3] $r \cos^{-1} r/(r + h) = g$

Nous savons aussi d'après l'énoncé que :

[4] $2g + 1 = 2t$

Ces équations peuvent se réaménager et se « simplifier » – si si, croyez-moi – pour donner : $h \approx (1/2)(3/2)^{(2/3)} r^{(1/3)}$

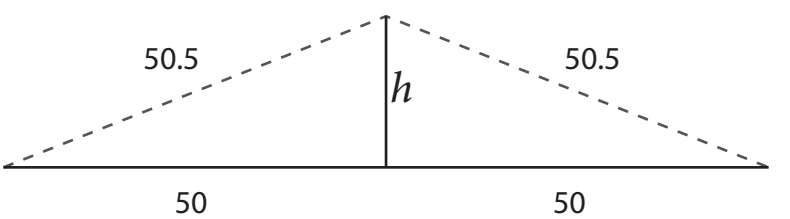
Aussi, avec r = 6 400 000 m, $h \approx$ 122 m

Et voilà ! J'ai présenté tout cela par pur esprit d'exhaustivité. Je vous promets de ne plus faire usage de la trigonométrie dans ce livre.

28. La rue enguirlandée (p. 68)

Ce problème, de même que le précédent, vise à éprouver notre intuition spatiale. Le poteau s'élèvera à 7 m de haut, soit à peu près l'équivalent d'une maison victorienne à deux étages, une hauteur qui dépasse largement celle de la plus grande girafe du monde. Étonnant, non ?

Pythagore nous porte à ce résultat sans effort. Comme illustré ci-dessous, le poteau fait apparaître deux triangles rectangles :



La guirlande forme l'hypoténuse, le poteau et le sol les deux autres côtés. Donc :

$h^2 + 50^2 = 50{,}5^2$

$h^2 + 2\,500 = 2\,550{,}25$

Soit en réordonnant :

$h^2 = 2\,550{,}25 - 2\,500 = 50{,}25$

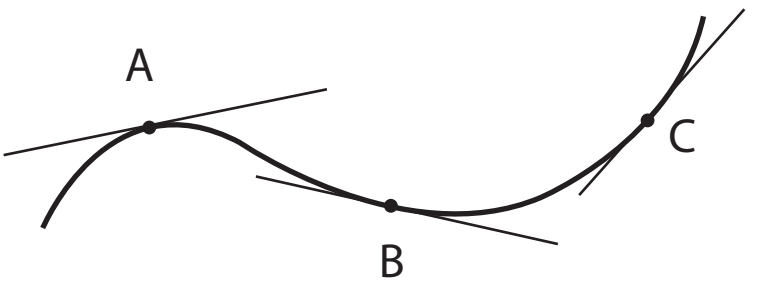
D'où :

$h = \sqrt{50{,}25} = 7{,}1$

29. En selle, Sherlock ! (p. 70)

Afin de trouver dans quelle direction roulait la bicyclette, il nous faut d'abord déterminer quelle trace correspond à la roue avant et quelle trace correspond à la roue arrière. Pour parvenir à ses fins, mon cher Watson, il importe de comprendre la relation entre la courbe formée par la trace du pneu et la position de la roue.

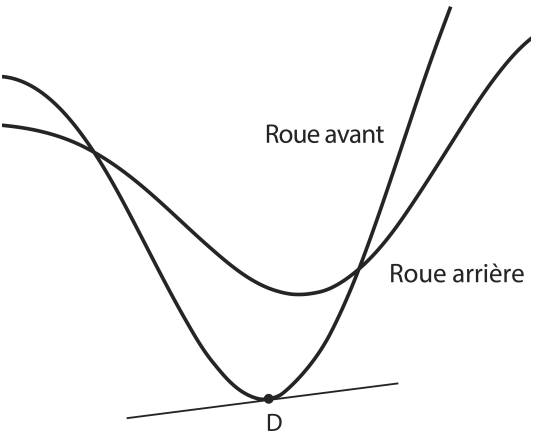
Si la trace est rectiligne, la roue qui la produit se dirige dans l'axe de la trace. Mais si cette trace est incurvée, la roue qui la produit pointe vers la *tangente* à la courbe en chaque point de la trace. (La tangente est la droite qui frôle la courbe en un unique point.) Pour bien comprendre ce que je cherche à expliquer, regardez la trace laissée par un monocycle représenté sur l'illustration. Quand elle passe aux points A, B et C, la roue suit l'axe des tangentes que j'ai marquées.



Une bicyclette a deux roues. Si la roue avant est libre de pointer dans n'importe quelle direction, il n'en va pas de même pour la roue arrière : celle-ci doit *toujours* pointer dans la direction de la roue avant.

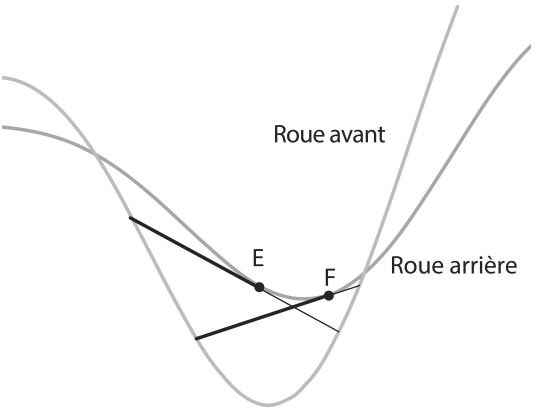
Quelle que soit la position de la roue arrière, donc, la roue avant se situe toujours exactement dans l'axe de la tangente à une longueur de bicyclette de là. En d'autres termes, toutes les tangentes à la trace de la roue arrière doivent traverser la trace de la roue avant, et elles doivent le faire à une longueur de bicyclette.

Portez maintenant votre attention sur le point D dans l'illustration suivante. Sa tangente ne croise aucune trace. Nous en déduisons que ce point D n'a pas été laissé par la roue arrière, c'est-à-dire qu'il l'a été par la roue avant.



Reste ensuite à découvrir dans quel sens roulait la bicyclette. Nous savons quelle trace correspond à la roue arrière et, par ce qui précède, nous savons qu'à une longueur de vélo le long de toute tangente à cette trace dans la direction du parcours se trouve un point laissé par la roue avant. Il nous suffit donc de suivre les segments de tangentes partants de E et F dans les deux sens et de regarder où elles

coupent la trace de la roue avant. Les segments partant de E et F vers la gauche sont de même longueur alors que ceux partant vers la droite ne le sont pas. Comme la distance entre les roues ne varie pas durant le trajet, la bicyclette allait de droite à gauche. Élémentaire !

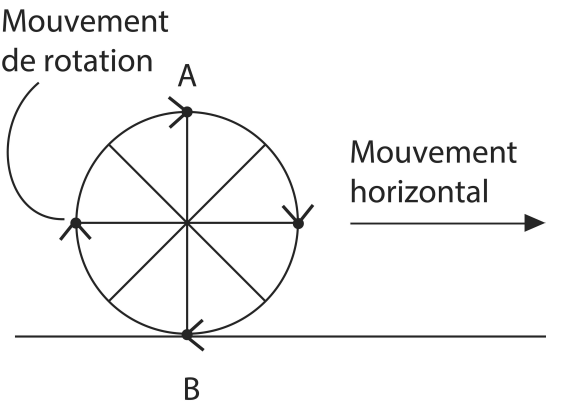


30. Maths floues (p. 71)

Cet énoncé me plaît beaucoup car il illustre un phénomène curieux : la partie supérieure d'une roue se déplace toujours plus vite que sa partie inférieure.

Quand une roue roule sur une surface horizontale, les points de la roue sont sujets à deux types de mouvement : un mouvement horizontal, dans la direction du parcours, mais aussi un mouvement de rotation, autour du centre de la roue. Ces deux types de mouvements se combinent et, parfois, s'annulent l'un l'autre. Considérons un point du bord de la roue. Quand ce point est au plus haut, en position A sur la figure ci-dessous, son mouvement horizontal et son mouvement de rotation vont dans le même sens. Mais quand il est au plus bas, en position B, ces deux mouvements vont dans des sens opposés et s'annihilent mutuellement. Du point de

vue d'un observateur, le point supérieur de la roue se déplace toujours à deux fois la vitesse horizontale alors que le point inférieur est stationnaire. Plus généralement, les points de la moitié inférieure de la roue se déplacent plus lentement que les points de la moitié supérieure.



Pour en revenir au casse-tête, c'est donc la seconde image qui correspond à la photo, celle qui présente un pentagone flou au-dessus et un pentagone net en dessous. Le temps d'exposition de l'appareil photo a été suffisamment court pour capter nettement le pentagone le plus lent mais pas assez pour capter le plus rapide. Les graphistes auront peut-être trouvé la solution instantanément car les parties supérieures des roues en mouvement se représentent souvent floues.

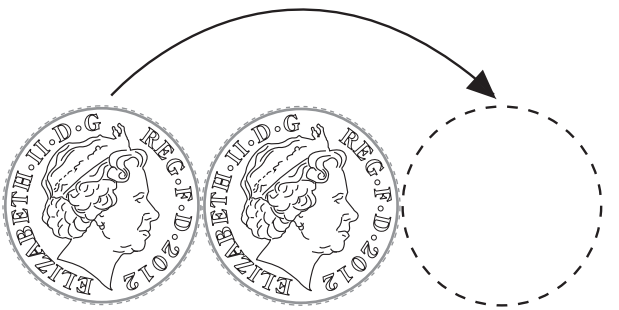
31. Des tours de cercles (p. 72)

Vous avez probablement abouti à la réponse (b), c'est-à-dire trois tours, celle que les examinateurs pensaient correcte.

Voici le calcul qu'ils attendaient des candidats : si le rayon de A fait le tiers du rayon de B, alors la circonférence de A fait le tiers de la circonférence de B (car la circonférence vaut 2π fois le rayon). Il faut donc trois circonférences de A pour couvrir une circonférence de B. Quand A fait un tour sur lui-même, il couvre une fois sa circonférence. Il doit faire trois tours sur lui-même pour couvrir trois fois sa circonférence, la circonférence de B.

L'erreur est difficile à repérer sauf à avoir étudié le comportement de cercles roulant autour d'autres cercles, ce qui n'était clairement pas le cas des examinateurs. Allons-y. Prenons deux pièces identiques et faisons rouler l'une autour de l'autre. Comme les pièces ont une circonférence identique, nous nous attendons donc, selon le raisonnement précédent, à ce que la pièce qui roule ait seulement tourné une fois sur elle-même quand elle revient à son point de départ. Et pourtant la tête de la reine aura fait *deux* révolutions ! Quand un cercle tourne autour d'un autre cercle, il faut ajouter une rotation supplémentaire, afin de prendre en compte le fait qu'il tourne autour de lui-même *et* autour d'une autre pièce.

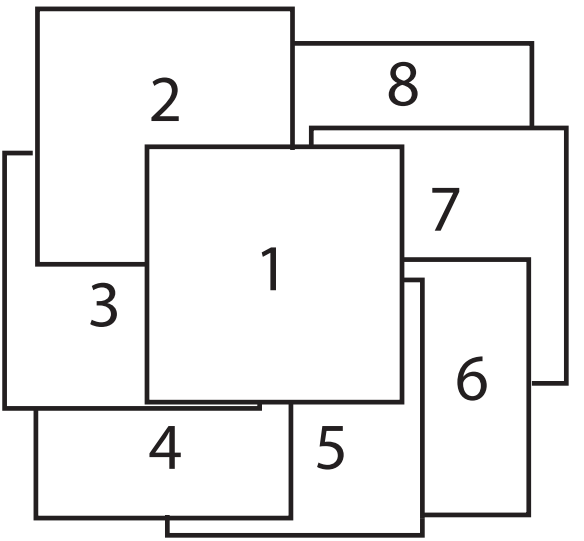
Si l'énoncé avait demandé : « Combien de fois A tourne-t-il sur lui-même en roulant sur *une ligne droite* de longueur égale à la circonférence de B ? », la réponse aurait été trois. Mais quand A tourne *autour* de B, la réponse est quatre.



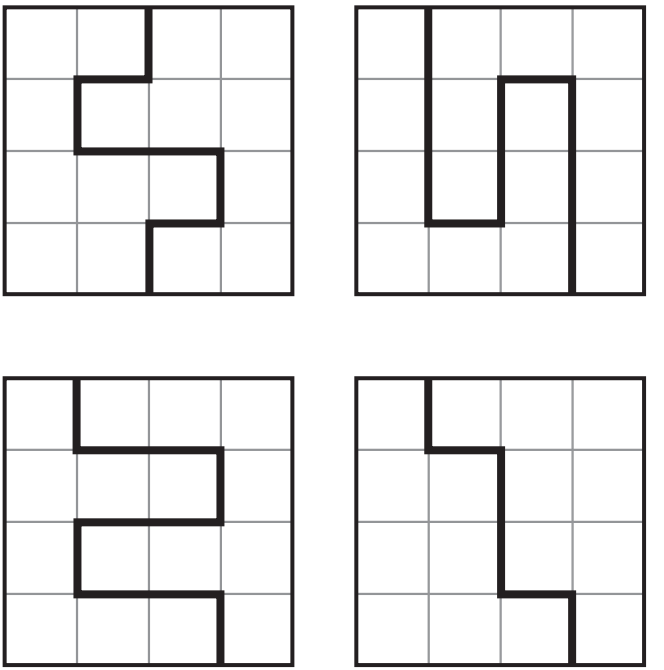
La solution correcte ne figurait pas parmi les options du questionnaire à choix multiples, ce qui explique que presque personne n'ait correctement répondu. Les examinateurs ont dû se mordre les doigts suite à cette bévue qui, une fois découverte, fit le bonheur du *New York Times* et du *Washington Post*.

32. Huit carrés bien ordonnés (p. 73)

Le carré de papier directement sous le premier ne peut être que celui du coin gauche supérieur. Le carré directement sous le coin gauche supérieur doit être celui positionné juste un peu en dessous. Et ainsi de suite en parcourant les carrés selon une spirale tournant dans le sens antihoraire.



33. Deux moitiés de carré (p. 74)

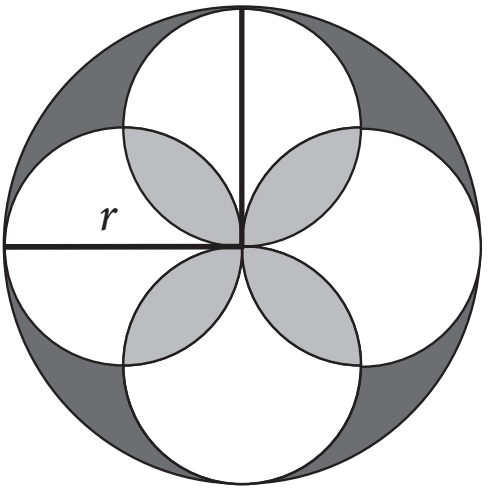


34. L'aile et la lentille (p. 75)

Ce casse-tête se simplifie en le développant ! Réunissons quatre quarts de cercles identiques pour obtenir un grand cercle contenant quatre cercles plus petits qui se chevauchent.

En notant r le rayon du grand cercle, l'aire de ce cercle vaut πr^2.

Comme les rayons des petits cercles sont deux fois plus petits que le rayon du grand, l'aire de chaque petit cercle vaut $\pi(r/2)^2 = \pi r^2/4$.



Résultat net et sans bavures : l'aire d'un petit cercle fait exactement le quart de celle du grand, donc l'aire de quatre petits cercles est égale à l'aire du grand.

Les petits cercles se chevauchent. Quelle aire délimitent-ils ? Celle des quatre petits cercles (πr^2) moins l'aire des chevauchements – qui sont les lentilles.

[1] Aire délimitée par les cercles qui se chevauchent

$= \pi r^2$ – aire des lentilles

Nous voyons par ailleurs que l'aire du grand cercle (πr^2) moins celle des ailes est égale à l'aire délimitée par les cercles qui se chevauchent.

[2] Aire délimitée par les cercles qui se chevauchent

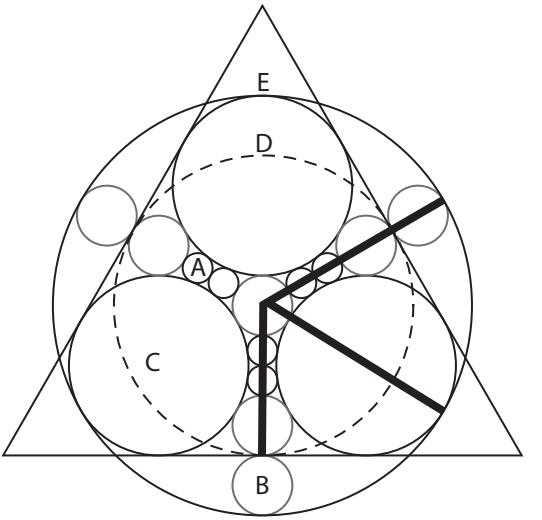
$= \pi r^2$ – aire des ailes

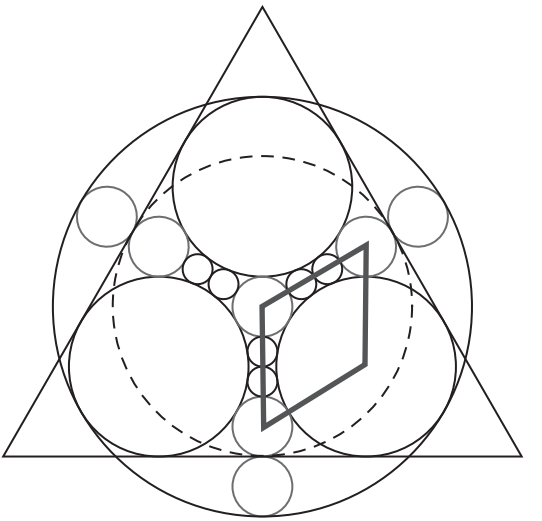
En combinant ces deux équations, nous obtenons :

πr^2 – aires des lentilles = πr^2 – aire des ailes.

Il apparaît alors clairement que l'aire des lentilles est égale à l'aire des ailes. Comme les quatre ailes sont de tailles égales et que les quatre lentilles sont de tailles égales, l'aire d'une seule aile est égale à l'aire d'une seule lentille.

35. Sangaku de cercles (p. 77)





La manière parfaite dont tous ces cercles s'intègrent les uns aux autres donne à l'image toute son élégance. Et, parce qu'elle nous permet de comparer les rayons des cercles, c'est aussi la clef de l'énigme !

Désignons par A, B, C, D et E les cercles pris dans l'ordre croissant, et par a, b, c, d et e leurs rayons respectifs. L'énoncé nous demande d'exprimer d en fonction de a.

J'ai tracé trois traits sur la première image. La verticale forme un rayon de D, le cercle en pointillé, tout en correspondant à quatre rayons de A plus trois rayons de B. Nous pouvons donc écrire l'équation :

[1] $d = 4a + 3b$

De la même façon, les deux autres traits pleins sont des rayons de E qui peuvent s'écrire :

[2] $e = 4a + 5b$

[3] $e = b + 2c$

L'astuce consiste ensuite à prendre conscience que, grâce au losange dessiné sur la seconde image :

[4] $4a + 2b = b + c$

Nous obtenons ainsi quatre équations et cinq inconnues. Comme nous cherchons d en fonction de a, il faut nous débarrasser des autres termes. Le cas de e se règle en égalisant [2] et [3] :

$4a + 5b = b + 2c$, soit

$4a + 4b = 2c$, soit :

[5] $2a + 2b = c$

En substituant c dans [4], nous obtenons ensuite :

$4a + 2b = b + 2a + 2b$, soit :

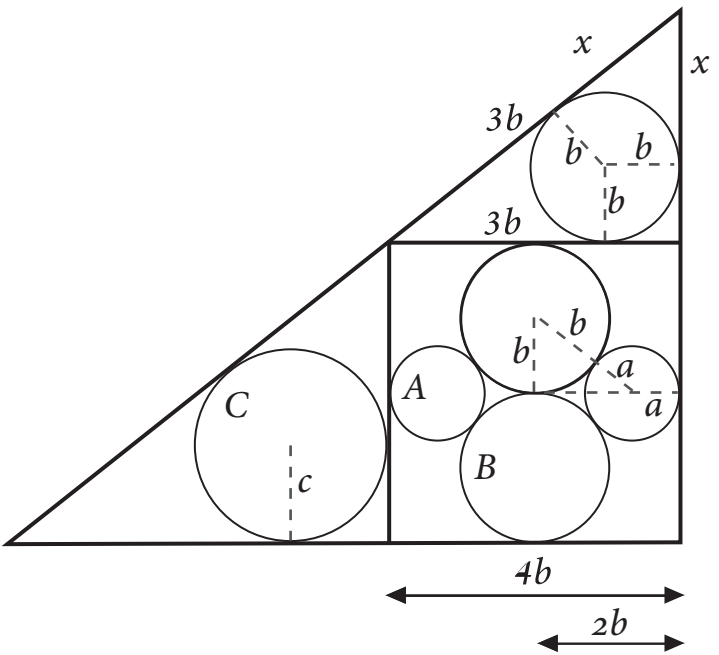
[6] $2a = b$

En substituant alors dans [1], nous obtenons :

$d = 4a + 6a = 10a$

Conclusion : le rayon de D vaut dix fois le rayon de A !

36. Sangaku du triangle (p. 78)



Désignons par A, B et C les cercles pris par ordre de taille croissante et par *a*, *b* et *c* leurs rayons respectifs. Nous allons exprimer *b* en fonction de *a*, puis *c* en fonction de *b*, ce qui nous permettra de conclure que $c = 2a$.

J'ai tracé sur l'illustration suivante un triangle rectangle en pointillé. Son hypoténuse mesure $b + a$, car elle est composée d'un rayon des deux cercles, tandis que ses deux autres côtés mesurent *b* et $2b - a$. La dernière longueur s'obtient en remarquant qu'elle vaut la moitié de la longueur du carré, dont le côté mesure $4b$, moins le rayon de A.

Selon le théorème de Pythagore, le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, soit ici :

$$(b + a)^2 = b^2 + (2b - a)^2,$$

soit en développant :

$$b^2 + 2ab + a^2 = b^2 + 4b^2 - 4ab + a^2,$$

en regroupant :

$$6ab = 4b^2,$$

en simplifiant :

$$3a = 2b,$$

au bout du compte :

$$b = 3a/2$$

Nous avons ainsi bien obtenu b en fonction de a.

Observez maintenant le triangle supérieur sur l'illustration. J'ai tiré un trait du centre du cercle à chacun de ses autres côtés. Chacun de ces traits coupe le côté à angle droit, si bien que le triangle se décompose en un carré $b \times b$ et deux figures en forme de cerf-volant. Le grand côté du cerf-volant le plus à gauche mesure $3b$, car il équivaut au côté du grand carré moins un rayon de B. Comme le cerf-volant est symétrique, l'autre grand côté du cerf-volant mesure aussi $3b$. En notant x le grand côté du cerf-volant plus à droite, le théorème de Pythagore appliqué au triangle donne :

$$(3b + x)^2 = (b + x)^2 + (4b)^2$$

Soit en développant :

$$9b^2 + 6bx + x^2 = b^2 + 2bx + x^2 + 16b^2$$

Puis en regroupant :

$$4bx = 8b^2$$

Soit :

$$x = 2b$$

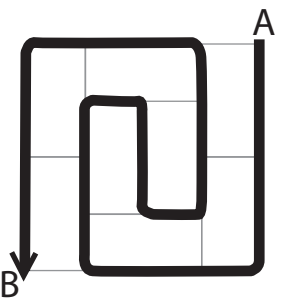
Le côté vertical du triangle supérieur mesure donc : $x + b = 2b + b = 3b$. Le côté vertical du triangle inférieur mesure $4b$. Comme les deux triangles sont de même forme, quoique de différente taille, le rapport de ces côtés, soit $3b/4b = ¾$, doit être égal au rapport des rayons des cercles intérieurs aux triangles, soit b/c.

Si 3/4 = b/c, alors $c = 4b/3$

Nous avons donc exprimé c en fonction de b et b en fonction de a. D'où l'expression de c en fonction de a :

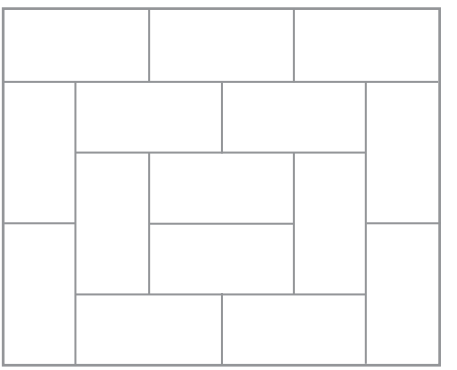
$$c = 4b/3 = 4(3a/2)/3 = 2a.$$

37. Cheminement sur tatamis (p. 79)

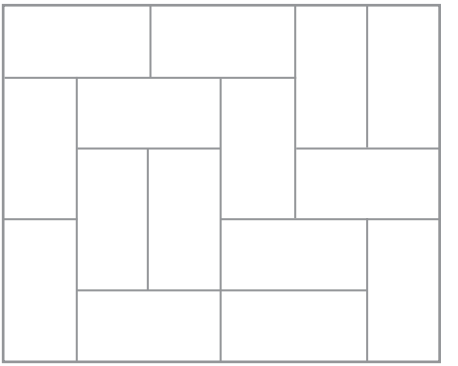


38. Quinze tatamis (p. 80)

La disposition qui suit est empruntée à *Jintoki*, dans son édition de 1641, le manuel de mathématiques japonais le plus populaire du XVIIe siècle.



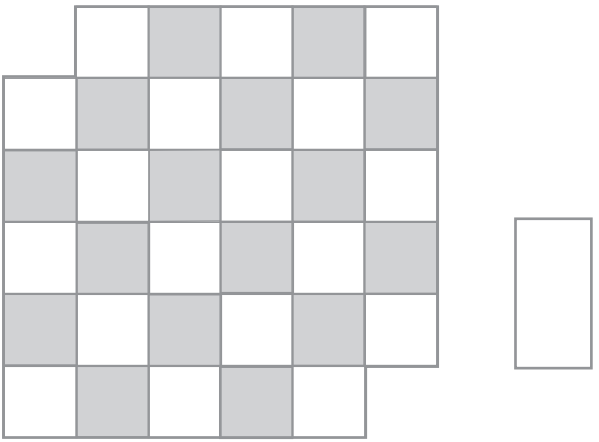
39. Les tapis de Nob (p. 81)



40. Autour d'escaliers (p. 82)

Effectivement, les tatamis ne pourront pas recouvrir la pièce 6 × 6 à laquelle on a retiré les coins. En noircissant une case sur deux à la manière d'un échiquier, comme sur l'illustration page suivante, nous en visualisons la raison. Un tapis recouvre nécessairement une case blanche et une case noire. Une pièce qui se laisse recouvrir par des tapis doit donc compter autant de cases blanches que de noires. Celle-ci présentant deux cases blanches de plus, tout recouvrement est impossible.

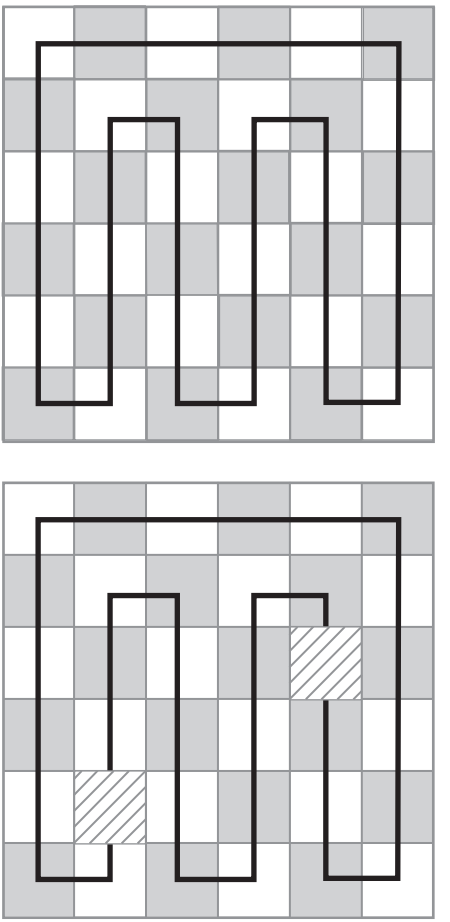
Ce problème est habituellement formulé avec des dominos et un échiquier « mutilé » : Peut-on paver un échiquier auquel il manque deux coins opposés par des dominos de la taille de deux cases ? Là encore, pour les mêmes raisons, la réponse est non.



41. Escaliers aléatoires (p. 83)

Nous allons faire usage d'une technique astucieuse, conçue par Ralph E. Gomory dans les années 1970, alors qu'il était directeur de recherche chez IBM. Elle s'appliquait à des dominos sur un échiquier, ce qui ne change rien.

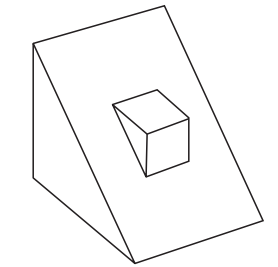
Commençons par tracer un chemin passant exactement une fois par chaque case de la pièce, comme sur la première illustration page suivante. Dans le second diagramme, j'ai arbitrairement retiré une case grisée et une case blanche correspondant aux escaliers. Elles coupent le chemin en deux sections. Chacune de ces sections passe nécessairement par un nombre pair de cases, cases qui se laissent donc recouvrir par des tatamis. L'argument se tient pour tous les chemins et tous les choix de paires de cases de couleur différente.



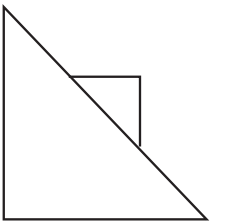
42. Une structure en bois (p. 84)

Ce problème m'a été suggéré par Joseph Yeo Boon Wooi, l'auteur singapourien de l'Anniversaire de Cheryl (Problème 21), qui en avait pris connaissance dans les années 1980. La solution la plus évidente, illustrée ci-dessous en A, correspond à ce que les architectes nomment une lucarne, c'est-à-dire une fenêtre verticale placée en saillie sur la pente

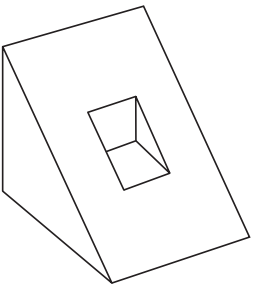
d'une toiture – comme nombre de ces professionnels se sont fait un plaisir de me l'indiquer. Deux autres solutions, B et C, sont aussi possibles.



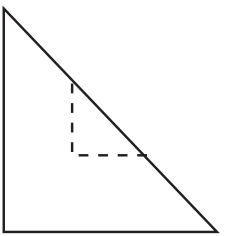
A



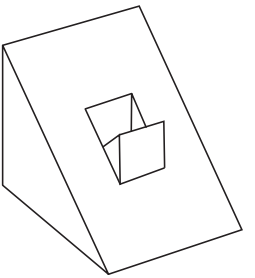
Vue latérale



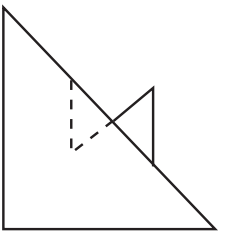
B



Vue latérale



C

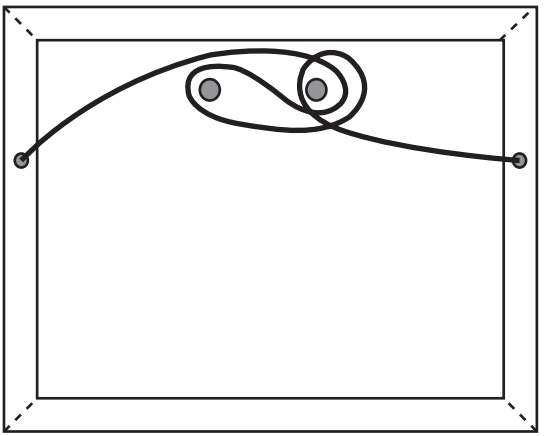


Vue latérale

43. Le tableau sur le mur (p. 87)

Ce problème se résout par la physique (bof…) ou par la voie mathématique (yes !). Comme attendu, la première est moins élégante que la seconde. Plantez dans le mur deux clous très proches l'un de l'autre, de façon à ce qu'ils puissent fermement retenir un bout de cordelette glissé entre eux. Disposez alors la cordelette selon un W, la pointe centrale supérieure passant entre les clous. Le tableau tient par les clous qui enserrent la cordelette. Que l'un des clous tombe, et le tableau suivra. Pas terrible comme solution, mais ça marchera probablement.

Voici une meilleure solution :



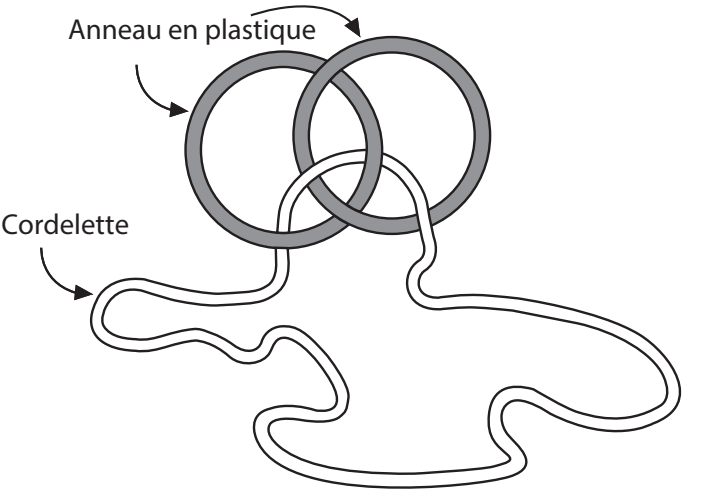
Mais il ne s'agit pas là de ma méthode de suspension favorite. J'attendais évidemment que vous trouviez une solution par rétro-ingénierie, guidé par mon discours sur les anneaux borroméens, qui, en se dénouant tous trois quand un seul est retiré, se posent en modèle du résultat que nous cherchons à obtenir. Le casse-tête concerne lui aussi trois éléments – deux clous et une cordelette – qui se déconnectent tous quand un

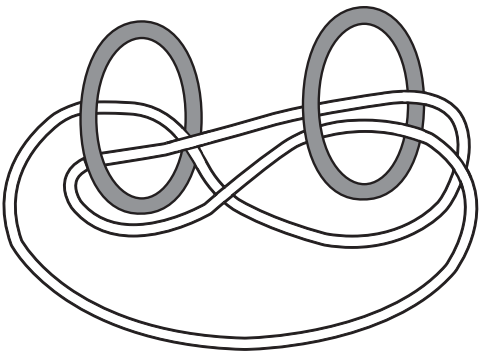
seul disparaît. La difficulté consiste simplement à déterminer comment deux clous et une cordelette sont équivalents à des anneaux borroméens, d'aspect très différent.

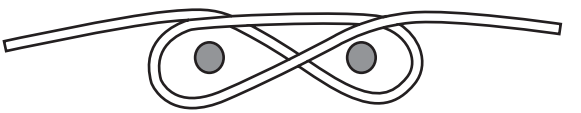
Tournons-nous de nouveau vers les anneaux borroméens. Ils peuvent être de forme circulaire, mais aussi triangulaire, comme dans le cas du valknut. Ils peuvent en fait prendre la forme de votre choix, pourvu qu'ils s'entrelacent de la même façon. Imaginons par exemple que chaque clou constitue la partie d'un morceau d'anneau rigide, qui partirait disons de la pointe à travers le mur, remonterait en s'arrondissant et reviendrait dans la pièce pour se recoller à la tête du clou. Et imaginez que les deux bouts de la cordelette se rejoignent, après avoir fait une boucle gigantesque tout autour de la pièce. Si ces trois anneaux sont entrelacés de manière borroméenne, alors retirer un clou rendra la cordelette indépendante de l'autre clou, précisément l'effet que nous visons.

Alors comment procéder ? J'ai moi-même fabriqué un ensemble d'anneaux borroméens constitué de deux anneaux en plastique et d'une cordelette, comme illustré ci-contre en haut. J'ai ensuite écarté les anneaux, comme illustré au milieu, avec l'idée qu'ils représentent les deux clous plantés dans le mur. L'enroulement de la cordelette entre les anneaux, sur l'illustration inférieure, correspond à la solution recherchée.

Notez que les seuls morceaux des « anneaux » qui nous intéressent sont les deux clous et la partie de la cordelette liée au tableau, car ils concentrent toute l'interconnexion. Le reste, à savoir l'extension des clous à travers le mur et de la ficelle autour de la pièce, n'importe guère.



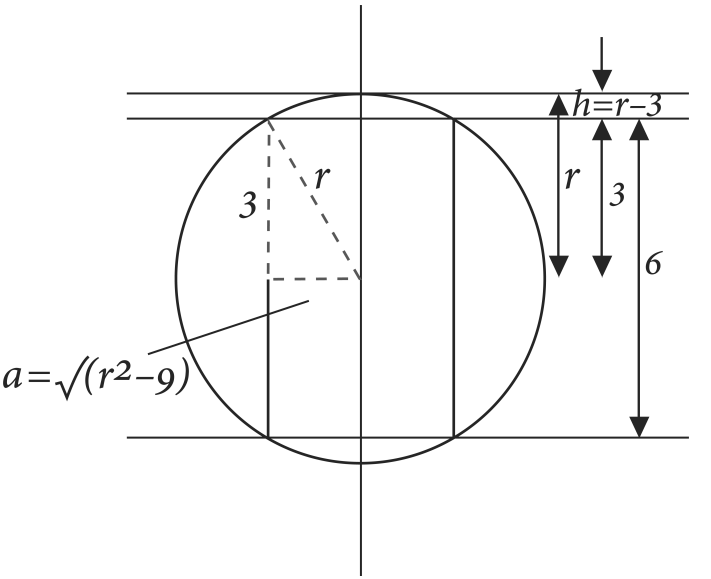




OU

44. Un rond de serviette remarquable (p. 88)

Terminons ce que j'ai commencé. Comme le rond de serviette mesure 6 cm de haut, la moitié de cette hauteur fait 3 cm. Le dôme a donc une hauteur de $h = r - 3$ cm, ainsi que l'illustre la coupe transversale présentée ci-dessous.



Pour trouver a, le rayon du cylindre ôté, nous appliquons le théorème de Pythagore sur le triangle à angle droit marqué en pointillé. Le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, soit $r^2 = a^2 + 3^2$, d'où $a = \sqrt{r^2 - 9}$.

Arrive maintenant le cœur de l'épreuve. Le volume du rond de serviette se calcule donc par la formule :

sphère – cylindre – 2 × dôme.

Soit encore :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi a^2 - 2\left(\frac{\pi h}{6}\right)(3a^2 + h^2)$$

Ou, en remplaçant a et h par leur expression en r :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi(r^2 - 9) - 2\left(\frac{\pi(r-3)}{6}\right)(3(r^2 - 9) + (r-3)^2)$$

Ou, en développant :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi r^2 + 54\pi - \frac{\pi(r-3)}{3}(3r^2 - 27) + (r^2 - 6r + 9))$$

En insistant :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi r^2 + 54\pi - \frac{\pi(r-3)}{3}(4r^2 - 6r - 18)$$

Nous y sommes presque :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi r^2 + 54\pi - \frac{\pi}{3}(4r^3 - 6r^2 - 18r - 12r^2 + 18r + 54)$$

Désolé pour l'odeur de sueur :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi r^2 + 54\pi - \frac{\pi}{3}(4r^3 - 18r^2 + 54)$$

Nous y sommes presque vous dis-je…

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi r^2 + 54\pi - \frac{4}{3}\pi r^3 + 6\pi r^2 - 18\pi$$

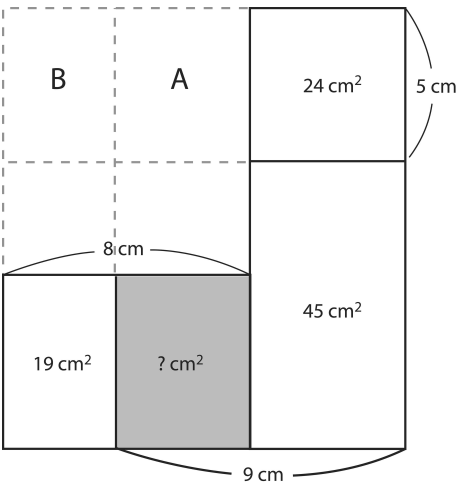
Les termes contenant r s'annulent, de sorte qu'il reste seulement : 36π.

Ce résultat est stupéfiant. Qu'aucun r n'apparaisse plus dans la solution signifie que la taille de la sphère n'a aucune importance !

Tous les ronds de serviette de 6 cm de haut ont un volume de 36π. Un rond de serviette de 6 cm de haut fabriqué en perçant une sphère de la taille d'une orange a le même volume qu'un rond de serviette percé dans une sphère de la taille d'un ballon de plage – ou même de la Lune.

L'augmentation de la circonférence de l'anneau va de pair avec son amincissement. L'accroissement de sa circonférence compense exactement la diminution de son épaisseur à toutes les tailles. É-pa-tant.

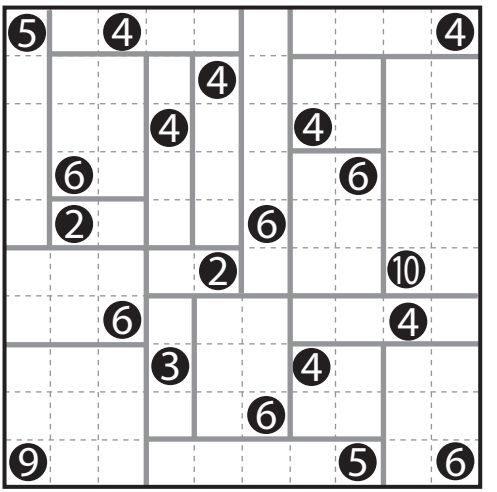
45. Aire mystérieuse (p. 92)



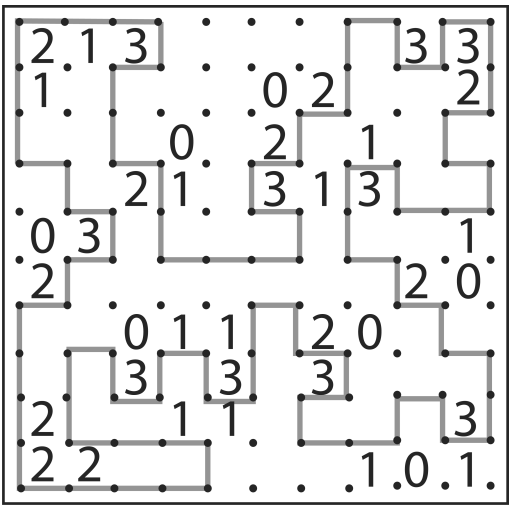
Complétons le diagramme par les traits en pointillé. L'aire A plus l'aire de 24 cm^2 est égale à 9 cm × 5 cm = 45 cm^2. Donc A = 45 cm^2 – 24 cm^2 = 21 cm^2. Par ailleurs, A + B = 5 cm × 8 cm = 40 cm^2. Donc B = 19 cm^2.

B a même largeur et même aire que le rectangle de 19 cm^2 situé deux étages en dessous : il doit donc avoir aussi même hauteur, et être identique à ce rectangle. Donc A a même hauteur et même largeur que le rectangle objet de nos recherches, donc même aire. La valeur recherchée est donc 21 cm^2.

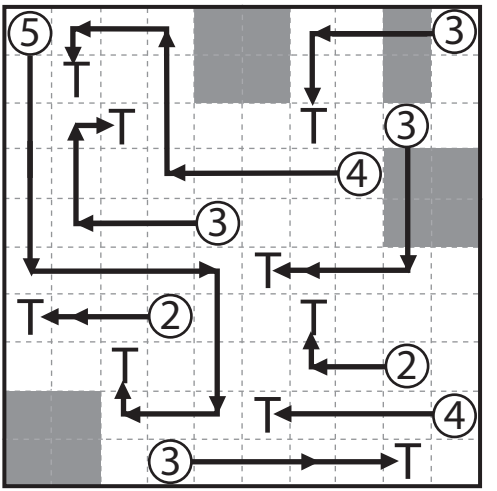
46. Shikaku (p. 94)



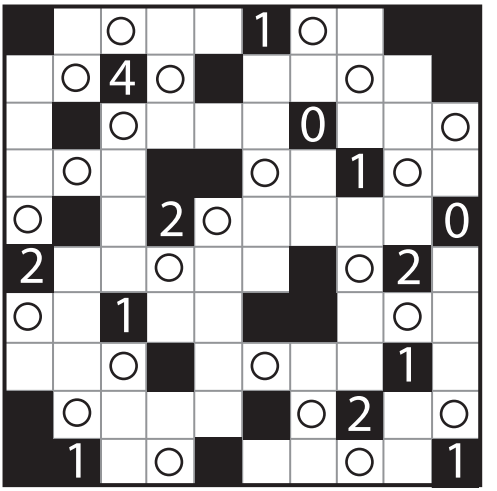
47. Slitherlink (p. 96)



48. Herugolf (p. 98)

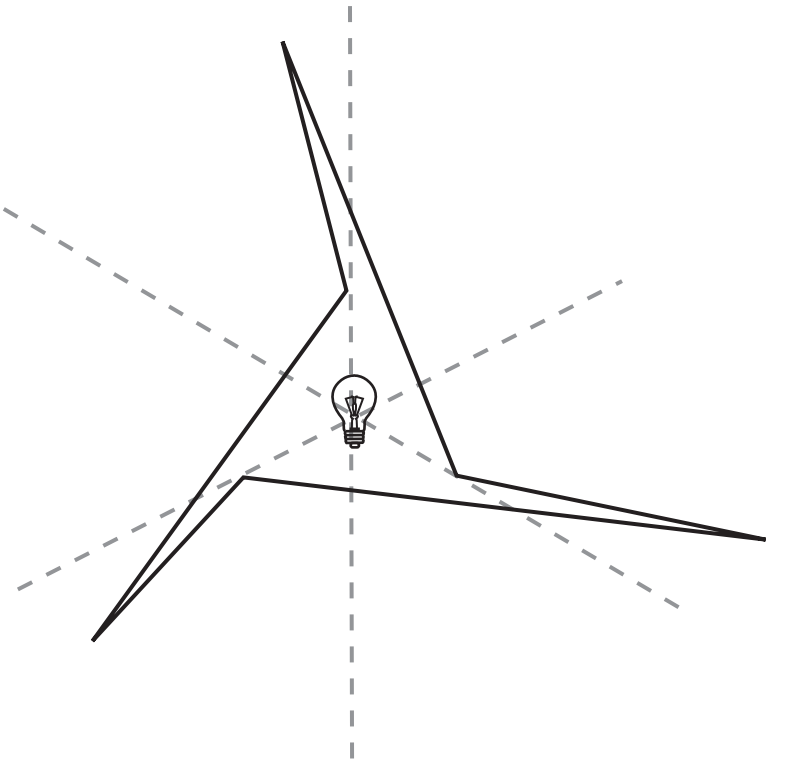


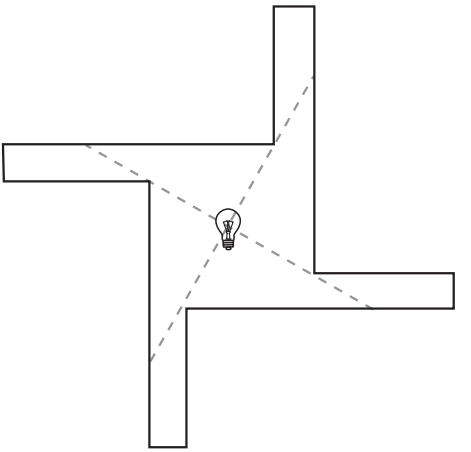
49. Akari (p. 100)



50. Le cabinet noir (p. 103)

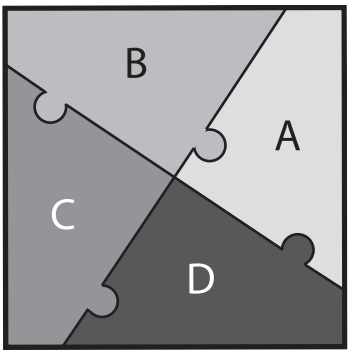
Il existe de nombreuses solutions, toutes dans la même veine. La pièce au nombre minimal de murs en compte six, disposés comme un *shuriken* à trois branches, cette arme en forme d'étoile qu'affectionnent les combattants japonais. La pièce à angles droits est plus réaliste d'un point de vue architectural.





En guise d'apéritif. *Êes-vous plus intelligent qu'un enfant de 12 ans ?* (p. 107)

1) E



2) D

Ce casse-tête se résout de plusieurs façons différentes. L'une d'elles consiste à réduire toutes les fractions à leur plus petit dénominateur commun, en l'occurrence 630 : ainsi ½ = 315/630, 2/3 = 420/630, etc. Une autre consiste à les exprimer sous forme

décimale. En la circonstance, cependant, comme les valeurs sont toutes proches de ½, il est astucieux de considérer chaque fraction moins ½. Pris dans l'ordre initial, ces écarts valent 0, 1/6, 1/10, 1/14 et 1/18, soit, du plus petit au plus grand et en retournant aux fractions originales : 1/2, 5/9, 4/7, 3/5 et 2/3.

3) C

La lettre *e* apparaît déjà six fois, de sorte que les mots « six » et « sept » peuvent s'insérer dans la phrase sans la faire mentir.

4) B

À chaque intersection, la ligne brisée est celle tracée en premier et la ligne continue celle tracée par-dessus. Il nous faut donc trouver un chemin qui présente une ligne brisée la première fois qu'il passe par n'importe quelle intersection et une ligne continue quand il passe par cette même intersection pour la seconde fois. Seul le chemin qui part de B en s'éloignant de D satisfait cette condition.

5) C

Parmi les options proposées, les nombres 23 × 34, 56 × 67 et 67 × 78 ne sont pas divisibles par 5 et peuvent donc être écartés. De même, 34 n'est pas divisible par 4 et 45 est impair, ce qui exclut 34 × 45, non divisible par 4. Reste 45 × 56. Ce nombre se décompose ainsi en produits de facteurs premiers : $45 \times 56 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Il est clair que ce nombre est divisible par tous les nombres entiers compris entre 1 et 10 inclus, car la décomposition contient les nombres premiers 2, 3, 5 et 7, qui suffisent à construire tous les autres : $4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2^3$, et $9 = 3^2$.

6) B

Si le valet de cœur dit la vérité, alors le valet de trèfle ment, ce qui signifie que le valet de carreau dit la vérité

et que le valet de pique ment. À l'inverse, si le valet de cœur ment, alors le valet de trèfle dit la vérité, ce qui signifie que le valet de carreau ment et que le valet de pique dit la vérité. Dans les deux cas, deux valets mentent, même si nous ne savons pas lesquels.

7) B

Considérons les coins du cube. Trois faces s'y rencontrent, et chaque paire de faces présente une arête commune. Il faut donc au moins trois couleurs différentes. Et pas une de plus, pourvu que les faces opposées, qui ne présentent jamais d'arêtes communes, soient peintes de la même couleur.

8) B

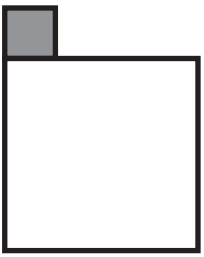
Si x désigne mon âge actuel, alors celui de Mamie vaut $4x$. Il y a cinq ans, nous avions : $4x - 5 = 5(x - 5)$. Cette équation se réduit à $x = 20$. Donc Mamie a 80 ans et moi 20.

9) B

Concentrons-nous d'abord sur les chiffres les plus à droite des nombres donnés, c'est-à-dire sur 3, 5, 7 et 9, puisqu'ils doivent être ajoutés/ôtés pour donner un nombre se terminant par 0. Le premier, 3, est positif. Ajouté à 7, il donne bien 10, mais 5 et 9 ne peuvent se combiner pour obtenir un nombre se terminant par 0. Il nous faut donc passer par 3 – 7, c'est-à-dire calculer 123 – 67 = 56. Reste à trouver un 44 supplémentaire en combinant 45 et 89. Seule façon de faire : 89 – 45. En tout, le calcul est donc 123 – 45 – 67 + 89. L'expression contient deux signes moins et un signe plus, donc $p - m = -1$.

10) A

Le carrelage se compose de la répétition du motif représenté sur l'illustration, soit un rapport de 1 sur 1.



52. Cent volatiles (p. 116)

Tout comme dans le problème des Cent volailles, traduisons d'abord l'énoncé sous forme de deux équations, l'une portant sur le nombre d'oiseaux, l'autre sur le prix total. En désignant les nombres de canards, de pigeons et de poulets par x, y et z, nous obtenons :

[1] $x + y + z = 100$

[2] $2x + y/2 + z/3 = 100$

Commençons par multiplier [2] par 6 afin de nous débarrasser des fractions :

[3] $12x + 3y + 2z = 600$

Multiplions [1] par 2 afin de faire apparaître $2z$:

[4] $2x + 2y + 2z = 200$

Le système se réduit maintenant à une seule équation par élimination du terme $2z$. D'abord en réordonnant [3] sous la forme $2z = 600 - 12x - 3y$, forme que nous substituons ensuite dans [4] :

$2x + 2y + 600 - 12x - 3y = 200$

Soit en simplifiant :

[5] $10x + y = 400$

Nous savons que x et y sont des nombres entiers inférieurs à 100. Nous déduisons en outre que y doit être multiple de 10, car 10 divise 400, ce qui implique que 10 divise aussi l'autre côté de l'équation, $10x + y$. Or 10 divise $10x$, donc 10 divise aussi y.

Les multiples de 10 inférieurs à 100 sont 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 et 90. Mais y ne peut valoir 70, 80 ou 90, car x vaudrait 33, 32 ou 31, si bien que la somme de x et y, c'est-à-dire des canards et des pigeons, dépasserait 100. Les six solutions sont y = 10, 20, 30, 40, 50 et 60, ce qui donne lieu aux partitions en volatiles suivantes :

Canards	Pigeons	Poulets
39	10	51
38	20	42
37	30	33
36	40	24
35	50	15
34	60	6

53. Ouvert de sept à onze (p. 117)

Nous recherchons le prix de *quatre* articles sachant seulement *deux* informations à leur propos : leur somme et leur produit.

Que cela ne nous empêche pas d'écrire les équations ! Soient a, b, c et d le prix de chaque article. Selon les indications du caissier :

[1] $a \times b \times c \times d = abcd = 7{,}11$

[2] $a + b + c + d = 7{,}11$

Le théorème fondamental de l'arithmétique énonce que tout nombre entier se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.

Quoique certainement très utile, ce théorème sur les entiers ne peut s'appliquer ici car la multiplication [1] contient un nombre décimal : 7,11. Qu'à cela ne tienne, nous allons transformer cette équation en nombres entiers par une série de substitutions.

Soient $A = 100a$, $B = 100b$, $C = 100c$ et $D = 100d$. En multipliant ces nouveaux nombres, nous obtenons :

[3] $A \times B \times C \times D = ABCD = 100\,000\,000\ abcd$

Or $abcd = 7{,}11$. D'où :

[4] $ABCD = 711\,000\,000$

Nous disposons maintenant d'un nombre avec lequel travailler. Par le théorème fondamental de l'arithmétique, 711 000 000 admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers. Ils se déterminent à la main ou (de préférence) à l'aide d'un ordinateur.

$711\,000\,000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 79$

Donc :

$ABCD = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 79$

Les nombres A, B, C et D sont composés de ces nombres premiers. Il s'agit maintenant de déterminer ceux d'entre eux qui se multiplient pour respectivement donner A, B, C et D. En d'autres termes, comment trouver les nombres premiers correspondant à A, B, C et D.

Revenons maintenant à l'équation [2], et multiplions-la par 100 pour faire apparaître A, B, C et D :

[5] $100a + 100b + 100c + 100d = A + B + C + D = 711$

Il nous faut donc trouver les nombres premiers correspondant à A, B, C et D de façon à ce que la somme de A, B, C et D fasse 711.

La mauvaise nouvelle, c'est qu'il n'y a pas d'astuce – il faut simplement tâtonner. Disons par exemple que $A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$, $B = 3 \times 3 = 9$, $C = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 15\,625$ et $D = 79$. Alors $A + B + C + D = 15\,777$, ce qui ne convient pas.

Une bonne partie de la procédure relève désormais du hasard, même si, peu à peu, nous nous forgeons une idée des ordres de grandeur respectifs de A, B, C et D. Et puis rien n'interdit d'être un peu malin ! La présence de nombreux 5 incite à penser que trois des nombres seront multiples de 5.

Dans ce dernier cas, la somme de ces nombres finira par 0 ou 5. C'est-à-dire que le quatrième nombre se terminera par 6 ou 1. Et quel est le plus petit multiple de 79 qui se termine par 6 ou 1 ? C'est 79 × 4. Alors :

$A = 79 \times 2 \times 2 = 316$

$B = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$C = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 120$

$D = 5 \times 5 \times 3 \times 2 = 150$

Ainsi, les articles coûtent respectivement a = 3,16 livres, b = 1,25 livre, c = 1,20 livre et d = 1,50 livre.

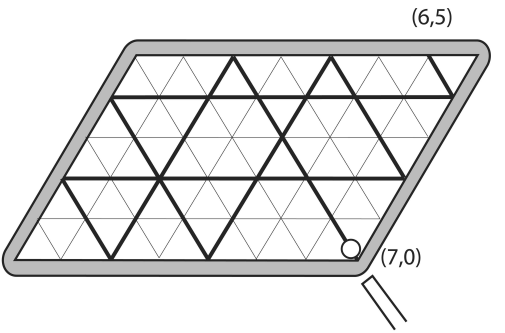
La beauté de ce casse-tête tient moins à sa laborieuse phase finale qu'à l'unique solution procurée de façon saisissante par le nombre 7,11.

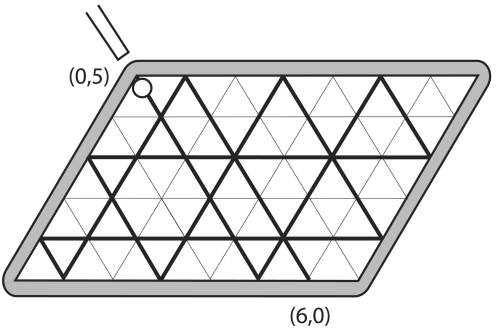
54. Les trois cruches (p. 119)

Continuez la lecture du texte jusqu'à la solution pour la table de billard pages 119-122.

55. Les deux seaux (p. 122)

J'espère bien que vous avez fabriqué la table de billard suivante :





La première illustration représente la trajectoire d'une boule initialement positionnée en (7, 0), ce qui correspond à d'abord remplir le seau de 7 litres. La seconde illustration représente la trajectoire d'une boule initialement positionnée en (0, 5), ce qui correspond à d'abord remplir le seau de 5 litres. La première trajectoire heurtant un côté de coordonnée horizontale 6 en moins de rebonds, c'est elle qui correspond à la façon de mesurer 6 litres en un nombre minimal de transvasements.

Les coordonnées des points de rebond sur la première illustration, qui représentent aussi le nombre de litres de chaque transvasement, sont (7, 0), (2, 5), (2, 0), (0, 2), (7, 2), (4, 5), (4, 0), (0, 4), (7, 4) et (6, 5). La solution la plus rapide consiste donc à remplir le seau de 7 litres, puis à en transvaser 5 litres dans le second, laissant ainsi 2 litres dans le premier, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 6 litres dans le premier et 5 dans le second.

56. Le café au lait (p. 123)

Supposons que la cafetière contienne 100 mL de café et que le bol contienne 100 mL de lait. Et disons que nous versions 10 mL de café dans le lait. Le bol contiendra maintenant 110 mL de…

Stop !

Bien sûr que nous pourrions résoudre ce problème pour des valeurs particulières arbitraires, puis généraliser la solution. Mais il existe un autre moyen, bien plus rapide et élégant…

D'abord, qu'il soit clair que mélanger deux liquides ne change pas la composition chimique de l'un ou de l'autre. Le volume total de café et le volume total de lait ne varient jamais. Ce qui n'est pas du café dans l'un des récipients est du lait, et ce qui n'est pas du lait est du café.

Après les deux transvasements, la cafetière contient un volume de liquide identique à celui de départ, avec cette différence toutefois qu'elle contient maintenant un volume de molécules de café et un volume de molécules de lait. Où est passé le volume de café perdu ? En totalité dans le bol puisque la quantité totale de café n'a pas varié. Donc le volume de lait dans la cafetière doit être égal au volume de café dans le bol. Les dimensions de la cafetière, celles du bol et les quantités transvasées entre les deux n'ont aucune incidence sur la solution.

Peut-être que l'énoncé formulé avec des gâteaux dans des boîtes serait plus parlant ? Une première boîte contient des biscuits au chocolat, une seconde des biscuits à la noix de coco. Transvasez un nombre arbitraire de biscuits au chocolat dans la boîte des biscuits à la noix de coco. Transvasez ensuite de la seconde boîte à la première le même nombre de biscuits – un mélange de biscuits au chocolat et à la noix de coco, cette fois.

La boîte des biscuits au chocolat contient maintenant des biscuits au chocolat et peut-être quelques biscuits à la noix de coco. Ce nombre de biscuits est évidemment identique à celui des biscuits au chocolat de la boîte des biscuits à la noix de coco.

57. Eau et vin (p. 123)

Une carafe ne peut contenir autant de vin que d'eau par des transvasements de demi-pintes. Un tel résultat ne pourrait s'obtenir qu'en transvasant le contenu entier d'une carafe dans l'autre.

Là encore, comme dans le problème précédent, autant éviter de résoudre le problème avec des valeurs particulières, nous risquerions de nous perdre dans un labyrinthe de fractions…

En l'occurrence, il vaut mieux raisonner en termes de concentrations. Quand un mélange plus concentré en vin est transvasé d'une carafe à l'autre, le mélange contenu dans la première carafe reste plus concentré en vin que le mélange contenu dans la seconde. Et cela parce que la concentration en vin du mélange de la première carafe n'a pas varié, alors que celle du mélange de la seconde se situera quelque part entre les concentrations initiales des deux carafes.

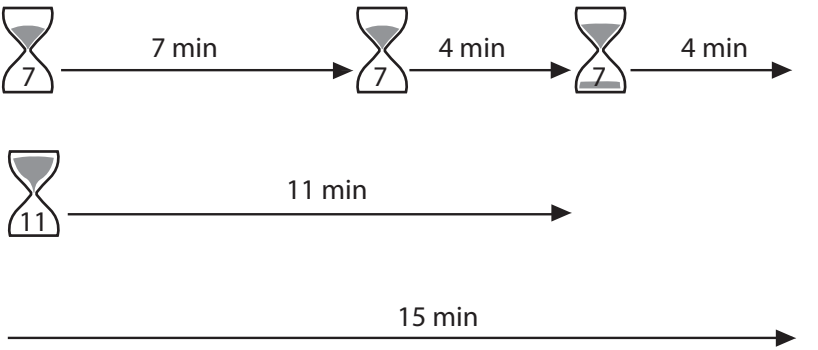
De la même façon, quand un mélange moins concentré en vin est transvasé d'une carafe à l'autre, le mélange contenu dans la première carafe reste moins concentré en vin que le mélange contenu dans la seconde. Et cela parce que la concentration en vin de la première carafe ne varie pas, alors que celle du mélange de la seconde se situera quelque part entre les concentrations initiales des deux carafes.

Au départ, une carafe contient 100 % de vin et l'autre 0 %. Comme ces concentrations ne sont pas identiques et que chaque transvasement – d'une concentration plus élevée vers une concentration moins élevée ou *vice versa* – préserve toujours une certaine différence, les deux carafes ne peuvent jamais contenir un mélange également concentré en vin et en eau.

58. Le quart d'heure de célébrité (p. 124)

La solution se révèle en prenant conscience qu'un sablier peut être retourné avant d'être entièrement vide.

Commençons par retourner les deux sabliers, comme auparavant, mais retournons une deuxième fois le sablier de 7 minutes immédiatement après qu'il est vide. Quand 11 minutes se seront écoulées depuis le départ, le sablier de 7 minutes se sera vidé durant 4 minutes. Retournons-le alors une troisième fois ! Il se videra alors en 4 minutes. Cela fait, il se sera écoulé un quart d'heure en tout.



59. Les chronomèches (p. 125)

[1] Selon l'énoncé, rien n'assure qu'une mèche coupée en deux moitiés égales se consumera en deux fois une demi-heure. Il s'ensuit qu'une mèche coupée au quart de sa longueur ne se consumera pas nécessairement en 15 et 45 minutes. Mesurer 45 minutes demande donc un autre angle d'attaque.

Si vous allumez une mèche à l'une de ses extrémités et que vous l'éteignez au bout de 30 minutes, la section restante – quelle que soit sa longueur – une fois rallumée, brûlera en 30 minutes. Si vous allumez la mèche des *deux* côtés

en même temps, elle brûlera toujours en 30 minutes, quand bien même elle brûlerait sur une plus longue distance d'un côté que de l'autre.

Allumons donc une mèche aux deux extrémités et une autre à une seule. Au bout de 30 minutes, la première aura totalement brûlé, tandis que l'autre devra encore brûler 30 minutes. À cet instant précis, allumons l'autre extrémité de la seconde mèche. Allumée des deux côtés, elle s'éteindra 15 minutes plus tard, marquant ainsi en tout une durée de 45 minutes.

[2] Une mèche allumée à l'une de ses extrémités brûle en une heure. Une mèche allumée à ses deux extrémités brûle en une demi-heure. Si une mèche pouvait être allumée à trois extrémités, elle brûlerait en un tiers d'heure, soit les 20 minutes requises, puisque trois foyers la consumeraient trois fois plus vite.

Or une mèche ne présente que deux extrémités, comme vous l'aviez sans doute remarqué…

Mais rien d'insurmontable ! Coupons la mèche en deux, allumons les deux extrémités du premier morceau et seulement l'une du second. La mèche se consume alors à partir de trois endroits, exactement le but recherché.

Il faut simplement nous assurer que la mèche brûle toujours en trois endroits. Ainsi, aussitôt que l'un des morceaux est entièrement consumé, nous coupons l'autre en deux et allumons la deuxième extrémité de la partie qui brûle déjà et une extrémité de l'autre partie. Et nous continuons ce processus jusqu'à ce que le morceau restant soit trop petit pour être coupé en deux. Comme la mèche a brûlé continuellement en trois endroits jusqu'à sa quasi-disparition, elle aura été allumée durant près de 20 minutes.

60. La pièce biaisée (p. 126)

Ce problème fut proposé – et résolu ! – pour la première fois par John von Neumann, un génie mathématique d'origine hongroise qui contribua significativement à de nombreux champs scientifiques tout en en inventant d'autres.

Une pièce biaisée ne tombe certes pas sur pile ou face avec une probabilité de 50/50. Mais une pièce biaisée lancée deux fois a une chance égale de tomber sur pile puis face que de tomber sur face puis pile. (Plus formellement, si a et b désignent les probabilités respectives de tomber sur pile et face, la probabilité de tomber sur pile puis face est égale à $a \times b$, alors que la probabilité de tomber sur face puis pile est égale à $b \times a$, ce qui est égal à $a \times b$.)

Ainsi, pour simuler le comportement d'une pièce parfaite avec une pièce biaisée, il suffit de parier sur « pile puis face » (PF) ou sur « face puis pile » (FP) et de lancer la pièce deux fois. Elle produira PF, FP, PP ou FF. Dans les deux derniers cas, c'est-à-dire quand la pièce tombe deux fois du même côté, il suffit d'ignorer le résultat et de relancer la pièce. Et de continuer jusqu'à obtenir PF ou FP. Les chances d'exhiber l'une ou l'autre de ces combinaisons sont de 50/50, soit le résultat d'une pièce idéale.

61. Deux tas de farine (p. 126)

Pesée 1 : Répartissez le kilo de farine sur les deux plateaux, de manière à ce que la balance soit à l'équilibre. Chaque plateau porte 500 g de farine.

Pesée 2 : Laissez un tas de 500 g de côté, et répartissez les 500 g restants sur deux plateaux, de manière à ce que la balance soit à l'équilibre. Chaque plateau porte 250 g de farine.

Pesée 3 : Laissez un tas de 250 g de côté et placez les deux poids sur le plateau libéré. Retirez de la farine de l'autre jusqu'à ce que la balance soit à l'équilibre. Ce plateau porte un tas de 250 g – 50 g = 200 g de farine. Rassemblé, le reste de la farine formera un tas de 800 g.

62. Le problème des poids de Bachet (p. 128)

Nous savons que, placés sur un seul plateau, l'ensemble des six poids suivants suffira à mesurer toute valeur entière comprise entre 1 et 63 :

1, 2, 4, 8, 16, 32

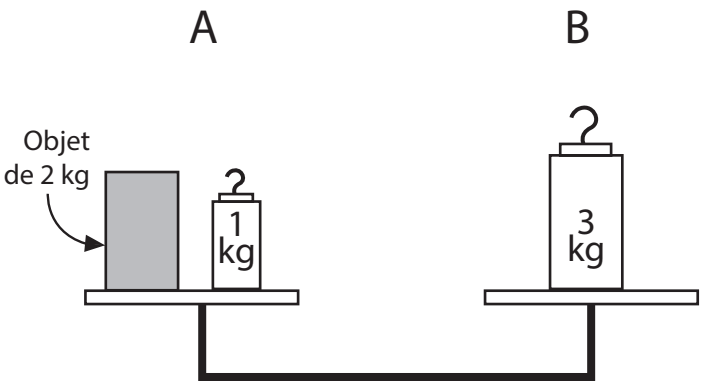
Nous cherchons un ensemble plus restreint de poids, éventuellement placés sur les deux plateaux cette fois, suffisant à mesurer toute valeur entière comprise entre 1 et 40 kg. Commençons par mesurer avec un nombre minimal possible de poids des valeurs croissantes à partir de 1 kg. Nous veillerons à n'introduire un nouveau poids qu'en l'absence d'autres possibilités, et nous le choisirons alors le plus grand possible à chaque fois.

Notons A et B les deux plateaux de la balance.

Un objet de 1 kg posé sur A s'équilibre par un poids de 1 kg posé sur B. Notre ensemble se réduit à ce stade à un poids de 1 kg.

Un objet de 2 kg sur A s'équilibre certes par un poids de 2 kg sur B. Mais une autre façon de procéder permet d'introduire un poids plus lourd : poser l'objet de 2 kg *et* le poids de 1 kg sur A, puis équilibrer par un poids de 3 kg sur B.

Comme il n'existe aucune autre façon d'équilibrer 2 kg avec un poids de 1 kg et un poids différent, notre ensemble se constitue maintenant d'un poids de 1 kg et d'un poids de 3 kg.



Avec ces deux poids, nous pouvons peser des objets jusqu'à 4 kg. Quel est le plus lourd des nouveaux poids qui nous permette, en nous servant des deux plateaux, de peser un objet de 5 kg ?

En plaçant comme plus haut sur A l'objet de 5 kg et tous les autres poids, 1 kg + 3 kg = 4 kg, il nous faut un poids de 9 kg pour équilibrer les plateaux.

Notre ensemble de poids se constitue alors de : 1, 3, 9.

Avec des poids de 1 kg, 3 kg et 9 kg, nous pouvons maintenant peser des objets jusqu'à 13 kg. Quel est le nouveau plus lourd des poids requis pour peser un objet de 14 kg en nous servant des deux plateaux ?

Par la même logique que la précédente, il s'agira de 14 kg + 13 kg = 27 kg.

Notre ensemble de poids se constitue désormais de : 1, 3, 9, 27.

Et ces poids nous mèneront à 40 kg. L'usage du second plateau de la balance réduit le nombre de poids de six à quatre.

Avez-vous remarqué le début d'une loi ? Quand les poids ne sont placés que sur un plateau, leur valeur forme une suite de doublement : chaque terme est le double du précédent. En revanche, quand les poids sont disposés dans les

deux plateaux, chaque terme est le triple du précédent. De la même façon que la suite de doublement se rapporte aux nombres binaires, la suite de triplement se rapporte aux nombres exprimés en base trois, ou nombres *ternaires*, les nombres uniquement formés de 0, 1 et 2.

Le ternaire 1020, par exemple, se comprend ainsi : aucune unité, 2 dans la colonne des trois, aucun neuf et 1 dans la colonne des vingt-sept. Soit 6 + 27 = 33. Le nombre ternaire 1020 est donc égal à 33 dans le système décimal traditionnel.

63. La pièce contrefaite (p. 130)

Numérotons les pièces de 1 à 12.

Plaçons les pièces 1, 2, 3, 4 dans le premier plateau et les pièces 5, 6, 7, 8 dans le second.

Si les plateaux s'équilibrent, la pièce contrefaite se trouve parmi celles qui restent : 9, 10, 11 ou 12.

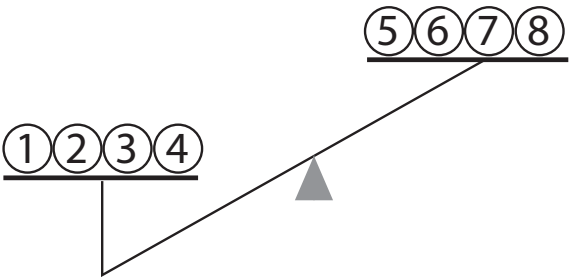
Plaçons alors dans le premier plateau trois de ces pièces, disons 9, 10, 11, et dans le second trois des pièces de la première pesée, toutes bonnes, disons 1, 2, 3.

Si les plateaux s'équilibrent, la pièce contrefaite est celle qui reste, la 12. Notre dernière pesée consiste alors à déterminer si elle est plus lourde ou plus légère en la comparant à n'importe quelle autre pièce.

Si les plateaux ne s'équilibrent pas, la pièce contrefaite est la 9, la 10 ou la 11, et nous savons qu'elle est plus légère ou plus lourde selon que le plateau qui les contient monte ou descend. Plaçons ensuite l'une de ces pièces sur le premier plateau, une autre sur le second et laissons la troisième de côté. Si les plateaux s'équilibrent, la pièce contrefaite est celle laissée de côté. Si les plateaux ne s'équilibrent pas, et que la pièce contrefaite est plus légère, celle-ci est dans le

plateau qui s'élève. Et si elle est plus lourde, dans le plateau qui descend.

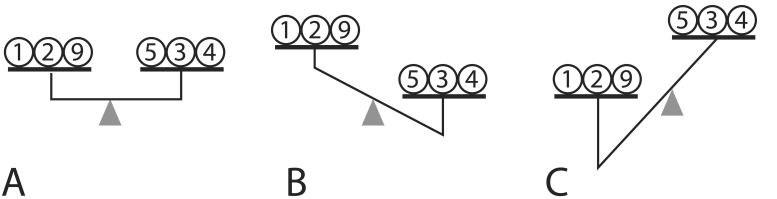
La solution se complique un peu si les plateaux 1, 2, 3, 4 et 5, 6, 7, 8 de la première pesée ne s'équilibrent pas.



Imaginons que 1, 2, 3, 4 descend et que 5, 6, 7, 8 monte.

Nous savons que les pièces 9, 10, 11 et 12 sont toutes bonnes. Plaçons-en une, disons la 9, sur le premier plateau avec deux des pièces qui s'y trouvaient, disons la 1 et la 2. Plaçons la 3 et la 4, les deux qui se trouvaient aussi dans le plateau qui baissait, avec une du plateau qui s'élevait, disons la 5. Les pièces 6, 7 et 8 sont exclues de cette pesée.

Les trois résultats possibles sont :



[A] Les plateaux s'équilibrent. La pièce contrefaite est la 6, la 7 ou la 8. Pour la troisième pesée, il suffit de placer la 6 sur un plateau et la 7 sur l'autre. En cas d'équilibre, la pièce contrefaite est la 8, qui est plus légère, car le plateau qui la portait s'élevait lors de la première pesée. En cas de

déséquilibre, la pièce contrefaite se trouve dans le plateau qui s'élève.

[B] Le premier plateau s'élève. La pièce contrefaite est la 1, la 2, la 3, la 4 ou la 5, mais non la 6, la 7 ou la 8, exclues de cette pesée.

Si la pièce contrefaite se trouve parmi la 1, la 2, la 3 ou la 4, alors elle est plus lourde que les autres, car le plateau contenant ces pièces avait baissé lors de la première pesée. La pièce contrefaite est alors la 3 ou la 4. La troisième pesée consiste à placer l'une de ces pièces dans un plateau et la seconde dans l'autre.

[C] Le second plateau s'élève. Comme dans le cas [B] précédent, les pièces 6, 7 et 8, exclues de la pesée, ne peuvent être contrefaites. Et là encore, si la pièce contrefaite se trouve parmi la 1, la 2, la 3 ou la 4, alors elle est plus lourde que les autres, car le plateau contenant ces pièces avait baissé lors de la première pesée. La pièce contrefaite est donc la 1 ou la 2.

Mais il reste encore une possibilité. Comme le plateau contenant les pièces 5, 6, 7 et 8 s'élevait lors de la première pesée, la pièce 5 pourrait être contrefaite et *plus légère*.

L'ultime pesée consiste donc à placer la pièce 1 dans un plateau et la pièce 2 dans l'autre. En cas d'équilibre, la pièce contrefaite est la 5, dans le cas contraire, la pièce contrefaite est dans le plateau qui baisse.

Si, lors de la première pesée, le plateau portant 1, 2, 3, 4 s'était élevé, le raisonnement aurait été identique en permutant 1, 2, 3, 4 et 5, 6, 7, 8.

64. La fausse pile (p. 131)

Une, bien sûr !

Placez sur le plateau une pièce de la première pile, deux de la deuxième, trois de la troisième, quatre de la quatrième

et ainsi de suite jusqu'à dix pièces de la dernière pile. Il y aura en tout 1 + 2 + 3 + 4 ... + 10 = 55 pièces de 1 euro sur le plateau.

Vous connaissez le poids d'une vraie pièce, donc vous connaissez le poids de 55 vraies pièces. La différence en grammes entre le poids affiché par la balance et le poids de 55 vraies pièces correspond au numéro de la pile de fausses pièces. Si cette différence vaut 1 g, la balance porte en effet une unique fausse pièce, ce qui signifie que la pile de fausses pièces est la première. Si elle vaut 2 g, la balance porte deux fausses pièces, ce qui signifie que la pile de fausses pièces est la deuxième. Et ainsi de suite.

65. Du Havre à New York (p. 132)

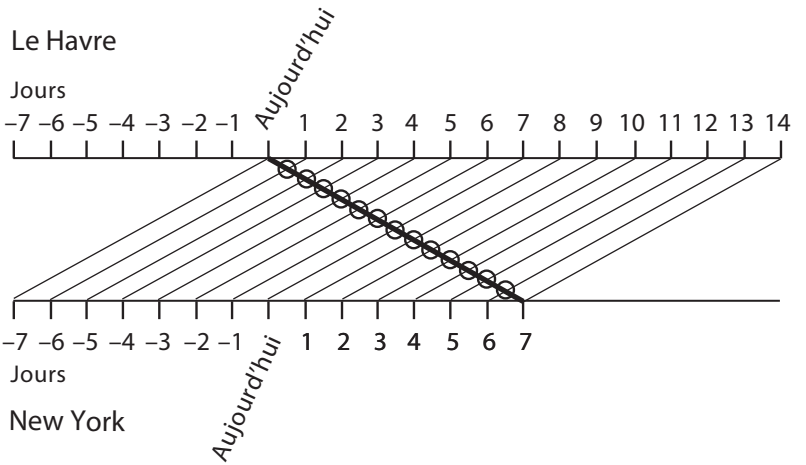
La première fois que le problème m'a été posé, j'ai immédiatement pensé à sept, certainement la réponse étourdie des illustres mathématiciens collés par M. Lucas.

Comme la traversée prend sept jours, vous croiserez les paquebots quittant New York aujourd'hui, demain, et ainsi de suite jusqu'au jour de votre arrivée, soit sept paquebots en tout.

Erreur ! Car vous avez omis les paquebots qui ont quitté New York la semaine passée ! Déjà en mer, vous les croiserez aussi durant la traversée. Réponse correcte : vous en croisez un dans le port à votre départ du Havre (celui qui arrive à midi, après avoir navigué une semaine), puis treize autres en mer, et le dernier, sur le départ, au port, en arrivant à midi une semaine plus tard à New York.

Le diagramme ci-dessous clarifie la situation.

Si tous les paquebots se déplacent à vitesse constante, vous en croiserez un toutes les douze heures, un à midi (heure du Havre), un à minuit.



66. Le vol aller-retour (p. 132)

Considérons d'abord que l'avion vole vent dans le dos à l'aller et face au vent au retour.

Instinctivement, il semble que la poussée du vent arrière et la résistance du vent de face s'annulent mutuellement : ce qui est donné à l'aller est repris au retour. En notant V la vitesse du vent, alors la vitesse augmente de V à l'aller et baisse de V au retour.

Reste que la vitesse du vent importe moins à la question que la *durée* du vol. Le temps gagné en volant plus vite n'est pas identique au temps perdu en volant plus lentement, et cela parce que l'avion vole plus longuement en volant plus lentement.

Posons quelques chiffres pour mieux comprendre la situation : un avion qui se déplace à 500 km/h parcourt 500 km en une heure.

Si l'avion parcourt la même distance à une vitesse plus élevée de 100 km/h, il arrivera dix minutes plus tôt (temps = distance/vitesse. Si la distance est de 500 km et la vitesse

de 600 km/h, soit 10 km par minute, le voyage dure donc 500/10 = 50 min).

Si l'avion parcourt la même distance à une vitesse plus lente de 100 km/h, il arrivera 15 min plus tard. (Si la distance est de 500 km et la vitesse de 400 km/h, le voyage dure 500/400 = 1,25 heure, soit une heure et quart.)

Ainsi, un trajet de 500 km aller-retour avec un vent soufflant à 100 km/h prendrait en tout cinq minutes de plus que s'il n'y avait pas de vent.

Pour éviter de plonger les mains dans le cambouis des calculs, songez à ce qui se passerait si la vitesse du vent était égale à la vitesse de l'avion. L'avion irait certes deux fois plus vite à l'aller, mais sa vitesse au retour serait nulle, si bien qu'il ne quitterait jamais le tarmac ! D'accord, c'est un cas extrême, mais il nous éclaire. En augmentant la vitesse d'une quantité fixe, vous ne gagnerez jamais plus d'une heure, alors qu'en la baissant de cette quantité fixe, vous finissez par y passer votre vie. L'un dans l'autre, un vol aller-retour quand le vent souffle dans la direction du voyage prend plus de temps qu'un aller-retour par calme plat.

Et quand le vent souffle de travers ? Un vent de travers se décompose en un vent soufflant dans la direction de l'avion (de dos ou de face) et un vent soufflant dans la direction perpendiculaire. Nous savons déjà que le premier augmente la durée d'un aller-retour, alors qu'en est-il du second ? Pour voler en ligne droite de A à B par vent perpendiculaire, l'avion doit compenser en faisant un certain angle avec le vent : en d'autres termes, une partie de sa vélocité est perdue à lutter contre le vent, plutôt que d'être entièrement dédiée à se déplacer de A à B. Le vol aller et le vol retour seront donc aussi plus longs.

La situation la plus favorable pour un aller-retour ? Le calme plat !

67. Les deux compteurs (p. 133)

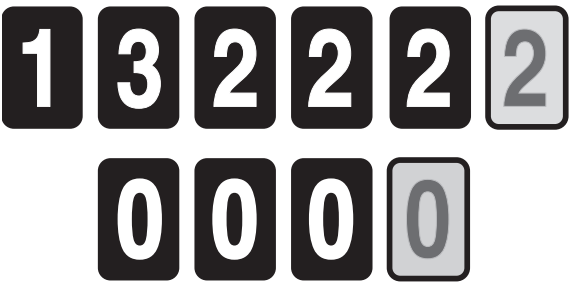
Il faut d'abord comprendre que le compteur journalier doit repasser par 000,0, c'est-à-dire atteindre les 1 000 km, avant que les quatre premiers chiffres des compteurs ne soient de nouveau identiques.

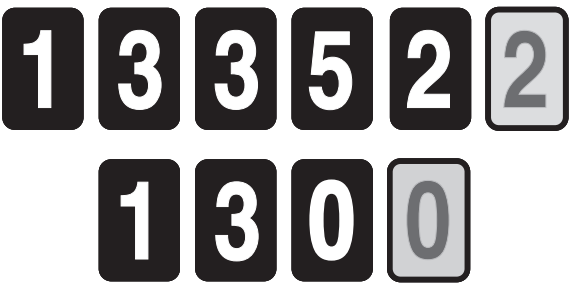
La voiture aura alors parcouru 1 000 – 123,4 = 876,6 km et son tableau de bord ressemblera à la figure du haut page suivante

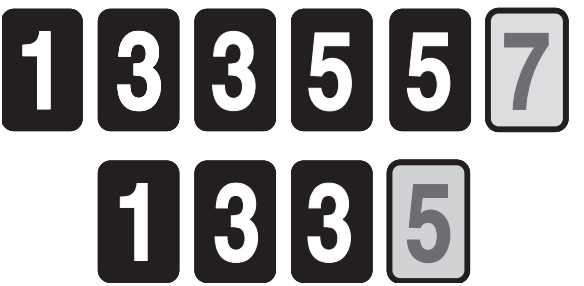
Qu'elle roule 130 km de plus, et les deux premiers chiffres seront similaires, comme sur la figure du milieu.

Encore 3,5 km, et nous atteignons notre but : c'est la figure du bas.

Les quatre premiers chiffres sont de nouveau identiques ; la voiture a parcouru 1 010,1 km.


1 3 2 2 2 2
0 0 0 0


1 3 3 5 2 2
1 3 0 0


1 3 3 5 5 7
1 3 3 5

68. Le dépassement (p. 134)

Ces casse-tête ne sont pas difficiles. Et c'est précisément cette simplicité qui pousse nos cerveaux paresseux à ne pas les regarder correctement.

[1] Quand vous doublez quelqu'un en deuxième position, vous êtes désormais vous-même en deuxième position.

[2] Nul ne peut doubler la personne en dernière position, car par définition personne ne se trouve derrière lui.

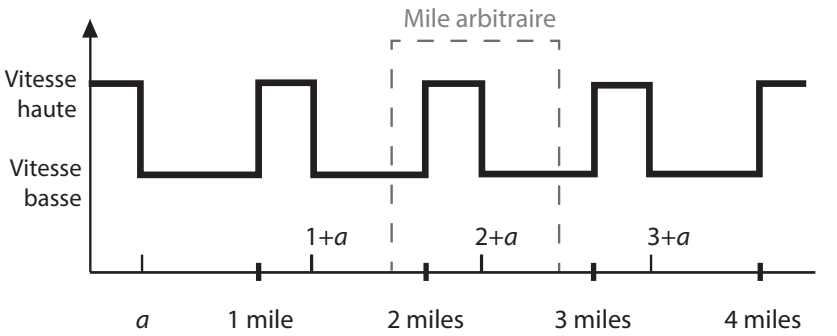
69. Stratégies de course (p. 134)

Ce casse-tête heurte vraiment l'intuition tant il semble impossible que Daphné, qui parcourt chaque mile en 8 min et 1 seconde, batte Constance, qui les couvre en 8 min pile.

Mais elle peut gagner, bien sûr, autrement il n'y aurait pas de casse-tête. Un coureur plus lent sur chaque mile peut en effet se montrer plus rapide sur les 26,2 miles.

Réfléchissons d'abord à la tactique de Daphné. Sans courir à vitesse constante, elle couvre malgré tout n'importe quel intervalle d'un mile dans un même temps. Comment peut-elle le faire ?

Observons le graphe page suivante, qui représente la vitesse d'un coureur en fonction de la distance parcourue. Sa stratégie consiste ici à courir la première partie a de chaque mile à vitesse constante soutenue, puis le reste à vitesse constante nettement moins élevée. En la répétant mile après mile sur tout le parcours de la course, le coureur ne se déplace pas à vitesse constante en permanence tout en couvrant chaque mile en une même durée. Et cela parce qu'il court une distance a à vitesse haute et le reste à vitesse basse sur tout intervalle d'un mile considéré.



Puisque Daphné court son marathon en adoptant cette stratégie, ajustons-la au meilleur résultat possible. Le marathon fait 26,2 miles. Comme elle perd 1 seconde sur Constance à chaque mile entier parcouru, nous savons qu'elle est 26 secondes derrière à la borne des 26 miles. Daphné doit donc rattraper ces 26 secondes durant les 0,2 mile restants.

Considérons donc la tactique de Daphné qui consiste à courir à haute vitesse les premiers 0,2 mile de chaque mile et à vitesse basse pour le reste. Il nous faut maintenant parler de *temps* plus que de *distance*. Disons que Daphné court les premiers 0,2 mile en x secondes, et les 0,8 mile restant en y secondes. Elle couvre alors chaque mile en $x + y$ secondes.

L'énoncé, en précisant que Daphné couvre chaque mile en 8 min et 1 seconde, soit 481 secondes, nous donne l'équation suivante :

[1] $x + y = 481$

Constance couvre quant à elle chaque mile en 8 min, soit la totalité du marathon en $26{,}2 \times 8 \times 60$ secondes, soit 12 576 secondes.

Supposons maintenant que Daphné gagne le marathon d'une seule seconde, soit en 12 575 secondes. Comme elle

parcourt 27 fois les 0,2 premiers miles de son cycle et 26 fois seulement les 0,8 miles restants, nous obtenons l'équation suivante :

[2] $27x + 26y = 12\,575$

Ce système se résout sans réelle difficulté. De [1], nous tirons : $y = 481 - x$. En reportant cette valeur de y dans [2], d'heureuses annulations conduisent à $x = 69$ et $y = 412$ secondes. Conclusion : si Daphné sprinte 69 secondes sur les premières 0,2 parties de chaque mile et reprend son souffle 412 secondes sur le reste, elle perd à la comparaison mile à mile, tout en battant pourtant Constance d'une seconde sur le fil.

70. Les pommes de terre desséchées (p. 135)

Le tas pèse 50 kg. Les pommes de terre perdent la moitié de leur poids ! Ce casse-tête heurte l'intuition comme peu d'autres.

Le calcul est pourtant relativement simple.

Les pommes de terre sont constituées à 99 % d'eau. Baptisons « essence de pommes de terre » le 1 % restant. Le rapport de cette essence à l'eau est au départ de 1 sur 99. Après évaporation, les pommes de terre n'étant plus constituées que de 98 % d'eau, le rapport passe à 2 sur 98, soit 1 sur 49. Comme la quantité d'essence de pomme de terre ne varie pas et continue de peser 1 kg, la quantité d'eau doit baisser jusqu'à 49 kg, d'où un poids total des pommes de terre de 1 kg + 49 kg = 50 kg.

Il faut ici retenir l'aspect notoirement trompeur des pourcentages. L'énoncé nous incite délibérément à penser que le changement est infime : un passage de 99 à 98 %, soit une réduction de 1/99. Mais la variation pertinente en l'occurrence est de 1 à 2 %, un facteur deux !

En matière de pourcentage, il est souvent plus facile de penser à des choses réelles. Imaginons une reformulation de l'énoncé qui mette en scène 99 hommes et 1 femme dans une pièce. Un certain nombre d'hommes sort, si bien que la femme compte non plus 1 % mais 2 % de la population de la pièce. Combien de personnes reste-t-il dans la pièce ? Moitié moins qu'avant – soit 50 personnes !

71. La bonne paye (p. 136)

Vous aurez sans doute deviné que la formule B paraît trop avantageuse pour l'être vraiment !

Formule A

Le salaire de départ de 10 000 euros par an augmente tous les six mois de 500 euros. Les six premiers mois, vous gagnez donc 5 000 euros, point à partir duquel votre salaire augmente de 500 euros pour les six prochains mois, et ainsi de suite. Voici le bilan des deux premières années :

	6 mois	6 mois	Salaire total
Année 1	5 000 euros	+ 5 500 euros	= 10 500 euros
Année 2	6 000 euros	+ 6 500 euros	= 12 500 euros

Formule B

Le salaire de départ de 10 000 euros augmente en fin d'année de 2 000 euros. En fin de première année, vous gagnez 10 000 euros, une somme déjà moindre que par la formule A. Après la grosse augmentation de 2 000 euros, vous gagnez 12 000 euros en fin de deuxième année.

	Salaire total
Année 1	10 000 euros
Année 2	12 000 euros

La formule A reste plus avantageuse, comme elle le restera les années suivantes. Les effets cumulés d'une augmentation plus petite mais plus fréquente l'emportent sur une grosse augmentation annuelle.

72. La courte paille (p. 136)

Le point de coupe tombe n'importe où sur la paille avec une égale probabilité. Il tombe donc la moitié du temps sur le côté gauche, la moitié du temps sur le côté droit. (Qu'il puisse tomber au centre n'a aucune incidence car il n'y a dans ce cas aucun morceau plus court que l'autre.)

Regardons maintenant ce qui se passe quand la coupe tombe du côté gauche de la paille. Le morceau le plus court sera le gauche, avec une longueur comprise entre zéro et la demi-longueur de la paille. En fait, comme tous les points de la demi-paille ont une chance égale d'être choisis comme point de coupe, le morceau le plus court de la paille mesurera, en moyenne, la moitié de la demi-paille, soit un quart de paille. Le même argument s'applique lorsque le point de coupe tombe du côté droit de la paille. En moyenne, le morceau le plus court mesurera donc un quart de paille.

73. Poignées de main (p. 137)

Dix personnes en tout assistent au dîner : Edward, Lucy et quatre couples. Chacun peut donc serrer la main de neuf personnes au plus : celle de tout le monde sauf la sienne.

L'énoncé précise cependant que nul ne serre la main d'une personne de connaissance. Nous pouvons supposer que chacun connaît son conjoint, ce qui baisse à huit le nombre maximal de mains qu'une personne peut serrer.

Comme Edward reçoit neuf réponses différentes, celles-ci sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

Considérons la personne qui a répondu 8. Elle serre la main de tout le monde excepté celle de son conjoint. Donc tout le monde excepté son conjoint serre au moins la main d'une personne. Donc la personne qui a répondu 0 doit être mariée avec la personne qui a répondu 8.

Considérons de même la personne qui a répondu 7. Elle serre la main de tout le monde excepté celle de son conjoint et celle de la personne qui a répondu 0. Donc toute autre personne serre au moins la main de deux personnes : la personne qui a répondu 8 et la personne qui a répondu 7. Donc la personne qui a répondu 7 doit être mariée avec celle qui a répondu 1.

De la même façon, nous déterminons que le troisième couple est formé de ceux qui ont répondu 6 et 2, et le quatrième de ceux qui ont répondu 5 et 3. La seule personne qui reste, Lucy en l'occurrence, a donc serré la main de quatre personnes.

74. Poignées de mains et embrassades (p. 137)

Commençons par les poignées de mains. Chaque homme serre les mains des autres hommes. Si le dîner ne comptait qu'un invité homme, il n'y aurait donc qu'une poignée de main, entre lui et Edward ; s'il n'en comptait que deux, que trois poignées de mains, entre les deux invités hommes et entre Edward et chaque invité ; et s'il en comptait trois, six poignées de mains – je vous laisse le vérifier.

Première conclusion : le dîner compte trois invités hommes.

Les femmes embrassent tout le monde sauf leur partenaire. Nous savons que trois des invités sont des hommes, soit déjà trois embrassades : entre Lucy et ces trois hommes.

Le nombre total d'embrassades se montant à douze, il nous en manque neuf. J'ai donc le plaisir de vous présenter Anna, notre nouvelle invitée. Si elle est célibataire, elle embrassera Edward, Lucy et les trois hommes, soit cinq embrassades. Si elle est en couple avec l'un des hommes,

elle embrassera seulement quatre fois. Comme nous sommes encore loin des neuf embrassades requises, accueillons une deuxième invitée, Béatrice.

Béatrice embrassera six fois si elle est célibataire, cinq fois si elle est en couple. Les embrassades d'Anna et de Béatrice peuvent-elles se combiner pour donner les neuf requises ? Oui, si les deux femmes sont toutes deux accompagnées, car elles embrasseront alors respectivement quatre et cinq fois. Terminé ! Cinq invités, deux couples et un homme célibataire participent au dîner.

75. Le ticket perdu (p. 138)

Ce casse-tête est plus compliqué qu'il n'y paraît, même si la solution ne demande ni calculs ni équations. Toute la difficulté consiste à trouver la bonne approche. Une fois cette étape franchie, la solution apparaît aussi directe qu'élégante.

Nos cent spectateurs gagnent tour à tour leur place au théâtre. Prenons donc ces personnes l'une après l'autre en notant, pour limiter les risques de confusion, A la première d'entre elles et Z la dernière. La question se laisse ainsi reformuler : quelle chance Z a-t-il de s'asseoir dans son fauteuil réservé si A s'assoit au hasard.

J'ai disposé les fauteuils en ligne sur l'illustration ci-dessous, en notant fauteuil A et fauteuil Z les fauteuils respectivement attribués à A et Z.

Considérons d'abord les cas où A s'assoit dans le fauteuil A ou le fauteuil Z. Si A s'assoit dans le fauteuil A, tous les spectateurs s'assiéront dans le fauteuil prévu, y compris Z. (C'est ce qui arriverait si A n'avait pas perdu son billet.)

Fauteuil A Fauteuil Z

A s'assoit dans le fauteuil A

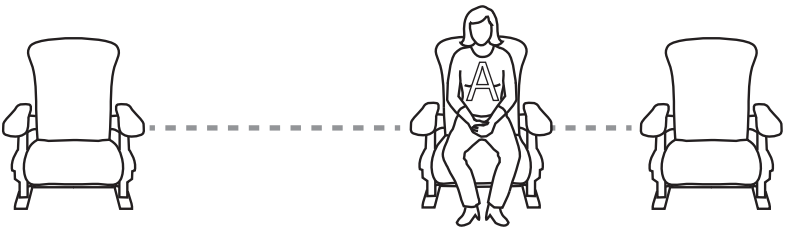
Et si A s'assoit dans le fauteuil Z, il est clair que Z ne s'assiéra pas dans son fauteuil réservé, puisque A l'occupe. Z s'assiéra dans le fauteuil A.

Fauteuil A Fauteuil Z

A s'assoit dans le fauteuil Z

Comme l'énoncé spécifie que A choisit son fauteuil au hasard, A a autant de chance de s'asseoir dans le fauteuil A que dans le fauteuil Z. En restreignant le problème à deux fauteuils, il y a 50 % de chances que Z s'assoit dans son fauteuil.

Considérons maintenant le cas où A s'assoit dans un autre fauteuil, disons le fauteuil N, réservé au *n*-ième spectateur de la file.



A s'assoit dans le fauteuil N

Si A s'assoit dans le fauteuil N, toutes les personnes suivantes de la file jusqu'à N s'assiéront dans leur fauteuil réservé. La première personne à ne pas pouvoir le faire est N, qui voit son fauteuil occupé par A. Donc N choisit un autre fauteuil au hasard. Il peut occuper le fauteuil A et les fauteuils des personnes qui le suivent dans la file, ce qui inclut le fauteuil Z.

Donc, N s'assoit dans le fauteuil A, et Z s'assiéra dans le fauteuil correct, ou N s'assoit dans le fauteuil Z, et Z ne s'assiéra pas dans le fauteuil correct, ou N s'assoit dans le fauteuil M d'une personne M qui se situe dans la file entre N et Z.

Restreintes aux cas où N s'assoit dans les fauteuils A ou Z, les probabilités sont toujours égales et Z aura encore 50 % de chances de s'asseoir dans son fauteuil réservé. Mais que se passe-t-il si N s'assoit dans le fauteuil M ?

Quand M devra à son tour gagner un fauteuil, elle se trouvera dans la même situation que N : une chance égale de s'asseoir dans A ou Z, ou une chance de s'asseoir dans le fauteuil d'un spectateur qui attend. Dans le dernier cas, le même scénario se répète.

À chaque étape, les chances que le spectateur choisisse le fauteuil A ou le fauteuil Z sont égales. Et si le spectateur

choisit le fauteuil d'un autre, la décision de choisir entre le fauteuil A et le fauteuil Z est reportée à un futur spectateur. Et leur nombre n'étant pas infini, il viendra un moment où l'un d'entre eux devra choisir entre le fauteuil A et le fauteuil Z.

Et ce spectateur contraint de choisir un fauteuil au hasard aura une chance égale de choisir le fauteuil A et le fauteuil Z. Et comme choisir le fauteuil A revient à dire que Z s'assoit dans le fauteuil correct, et que choisir le fauteuil Z revient à dire qu'il ne le fait pas, les chances de Z de s'asseoir sur le fauteuil qui lui a été affecté sont de 50 %.

En guise d'apéritif. *Êes-vous un génie en géographie ?* (p. 141)

1) Rome.

2) Le Maine. La côte de l'Atlantique nord des États-Unis s'étend bien plus à l'est qu'on ne l'imagine.

3) Rennes, Bordeaux, Toulouse, Calais, Albi – Oui, Calais est plus à l'ouest qu'Albi.

4) Paris, Seattle, Halifax, Alger, Tokyo.

5) L'île de Pâques, Perth, Le Cap, Buenos Aires, Montevideo.

6) L'Allemagne, qui compte neuf voisins. Dans le sens des aiguilles d'une montre : le Danemark, la Pologne, la République tchèque, l'Autriche, la Suisse, la France, le Luxembourg, la Belgique et les Pays-Bas.

7) Île d'Ouessant, île d'Yeu, île de Noirmoutier, île de Ré, île d'Oléron.

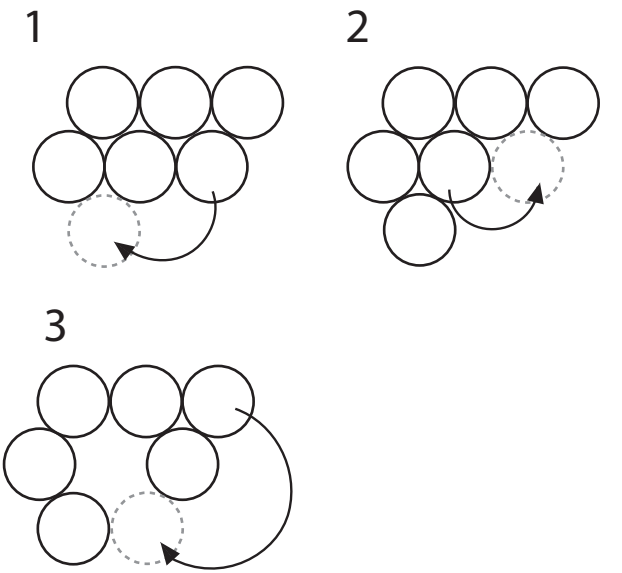
8) Le Canada.

9) La Chine, curieusement, se trouve tout entière dans un unique fuseau horaire, même si sa distance d'est en ouest mesure près de 5 000 km, soit en gros deux fois la distance de Paris à Moscou.

10) L'Aconcagua, 6 962 m ; le Denali 6 194 m ; le Kilimandjaro 5 892 m ; l'Elbrouz, 5 642 m.

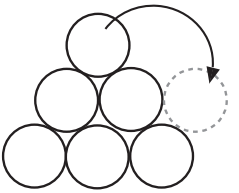
76. Les six pièces (p. 145)

Il faut d'abord disposer les six pièces en parallélogramme, comme sur le premier diagramme ci-dessous. Chaque mouvement est ensuite représenté par une flèche.

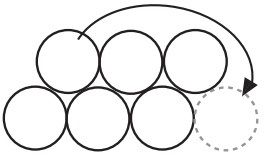


77. Du triangle à la droite (p. 145)

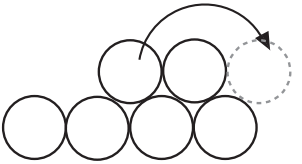
1



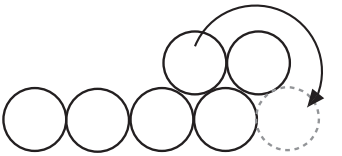
2



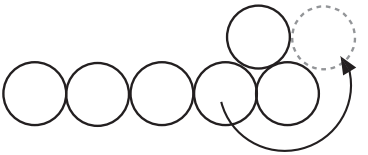
3



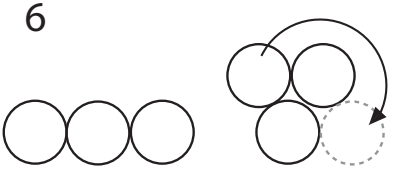
4



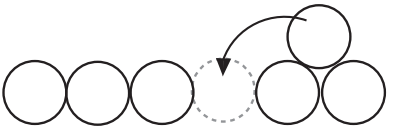
5



6

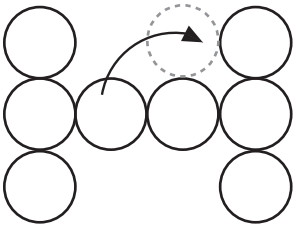


7

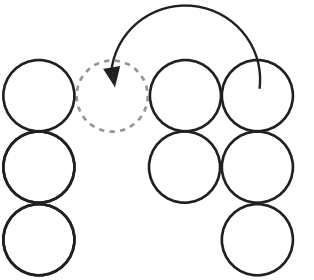


78. Histoire d'eau (p. 146)

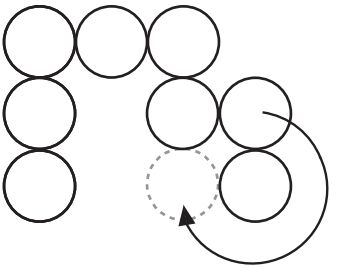
1



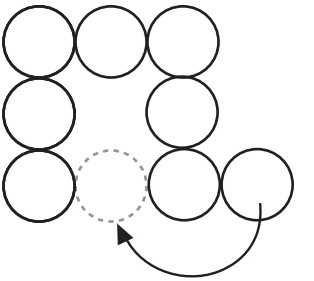
2



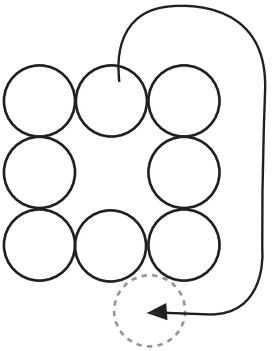
3



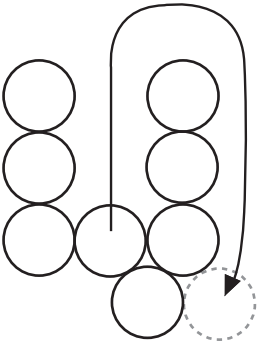
4



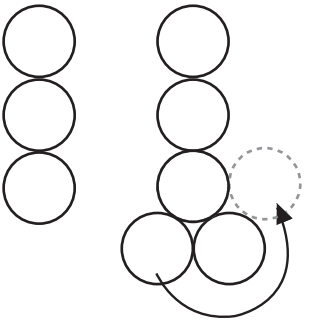
1



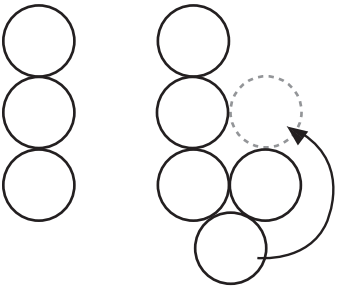
2



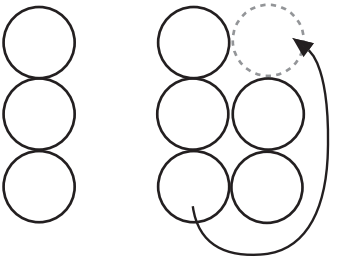
3



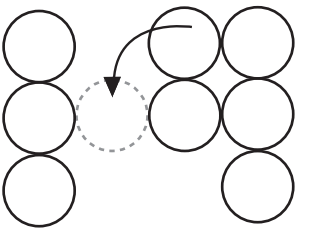
4



5



6



79. Les cinq pennies (p. 148)

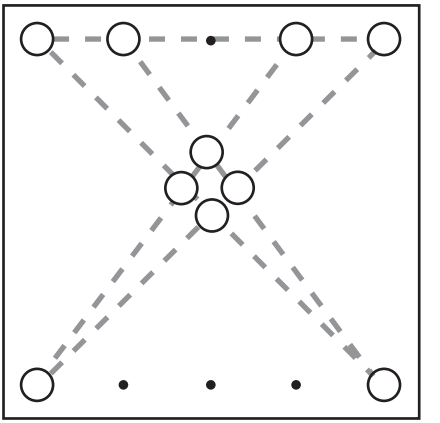
La solution de Dudeney consistait à poser un penny à plat, deux autres à plat par-dessus, puis de positionner les deux derniers sur la tranche de manière à ce qu'ils se touchent l'un l'autre en haut et touchent les trois autres en bas. C'est assez délicat à exécuter mais ça marche. Dans *The Tokyo Puzzles*, Kobon Fujimura fait état d'une autre solution, envoyée par l'un de ses lecteurs, avec une seule pièce sur la tranche.

80. Savez-vous planter dix arbres ? (p. 149)

Partant de deux alignements de cinq pièces, il s'agit de parvenir à cinq alignements de quatre.

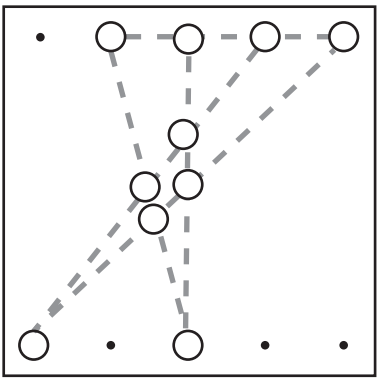
Nous ne pouvons déplacer que quatre pièces.

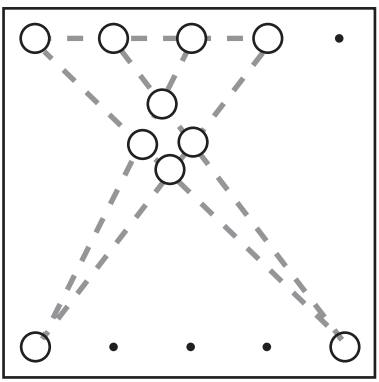
Il ne paraît pas absurde de déplacer une seule pièce d'un des alignements de cinq, ce qui donne un premier alignement de quatre, et trois autres pièces du second alignement de cinq.



L'illustration précédente montre comment former quatre nouveaux alignements de quatre en joignant chaque pièce du premier alignement de quatre à l'une ou l'autre des deux pièces opposées. Dans cette solution, j'ai déplacé la pièce centrale de l'alignement supérieur et les trois pièces centrales de l'alignement inférieur. Mais j'aurais tout aussi bien pu déplacer n'importe quelle pièce de l'alignement supérieur (ou inférieur) et n'importe quel triplet de pièces de l'alignement inférieur (ou supérieur). La page suivante présente deux autres solutions constituées par un choix différent de pièces.

Alors, combien le problème compte-t-il de solutions en tout ? Avec cinq choix de pièces possibles dans un alignement de cinq et dix choix de trois pièces possibles dans un





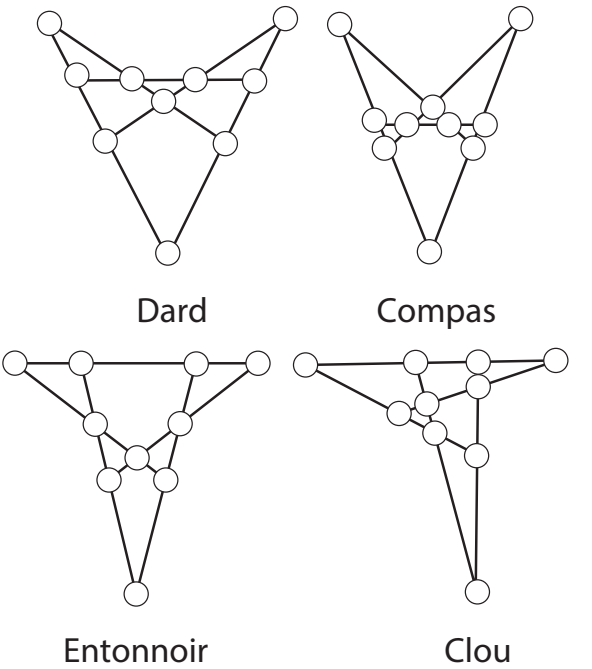
alignement de cinq, soit 5 × 10 = 50 choix possibles d'une pièce dans l'alignement inférieur et de trois pièces dans l'alignement inférieur, nous parvenons déjà à 50 solutions. Il faut y ajouter les 50 autres obtenues en choisissant une seule pièce de l'alignement inférieur et trois pièces de l'alignement supérieur, soit 100 solutions en tout.

Si j'accepte volontiers cette réponse, j'accorderais toutefois des points supplémentaires à ceux qui prendraient conscience que chacune de ces 100 solutions peut être produite de 24 façons différentes, puisque les quatre pièces

déplacées peuvent être positionnées de 24 façons différentes. Prenons par exemple la première solution ci-dessus, où les pièces déplacées forment un carreau, et notons ces pièces A, B, C, D en commençant, disons, par la plus haute et en poursuivant dans le sens des aiguilles d'une montre. Une solution correspond alors à la disposition ABCD, une autre à ABDC, une autre à ACBD et ainsi de suite pour les 24 permutations de A, B, C et D.

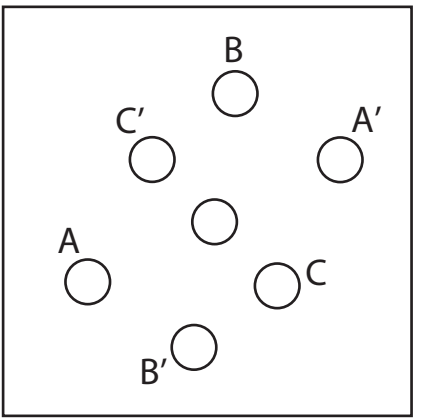
Il y a donc en tout 100 × 24 = 2 400 solutions.

Et voici la galerie de Dudeney des dispositions de dix arbres formant cinq alignements de quatre.



81. La course à l'espace (p. 152)

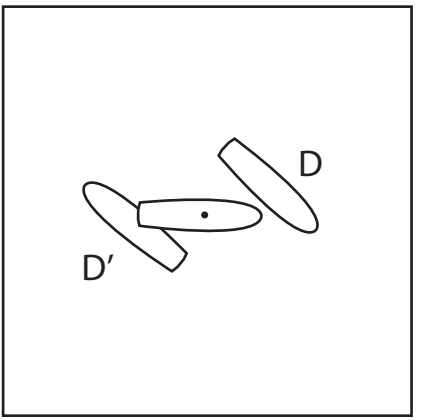
Le joueur qui commence gagnera toujours, pourvu qu'il applique la stratégie suivante : placer sa première pièce pile au milieu de la table, puis les autres toujours à l'opposé de celles de son adversaire.



Si, comme dans le diagramme ci-dessus, le joueur 2 place une pièce en A, le joueur 1 place la sienne en A'. Et si le joueur 2 place ensuite une pièce en B ou C, le joueur 1 en place une en B' ou C'.

Comme la table est vide au départ, il sera toujours possible au joueur 1 de placer une pièce dans la direction opposée à celle du joueur 2. Le joueur 1 ne peut donc pas perdre. Et le joueur 2 finira par ne plus trouver aucun espace disponible.

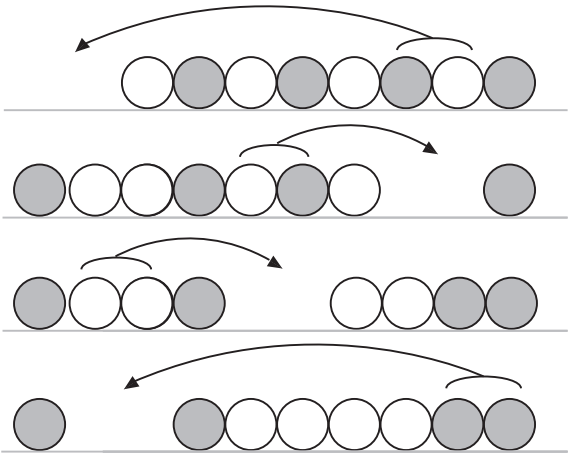
Si vous voulez jouer à ce jeu avec des cigares, il faut poser le tout premier debout au centre. Mais ne pas le poser à plat du fait de la différence des deux extrémités – l'une est plate, l'autre arrondie. (Vous pouvez maintenant me remercier d'avoir remplacé les cigares par des pièces : l'asymétrie des bouts de cigares ne constitue plus de nos jours un prérequis évident, même dans les clubs londoniens.)



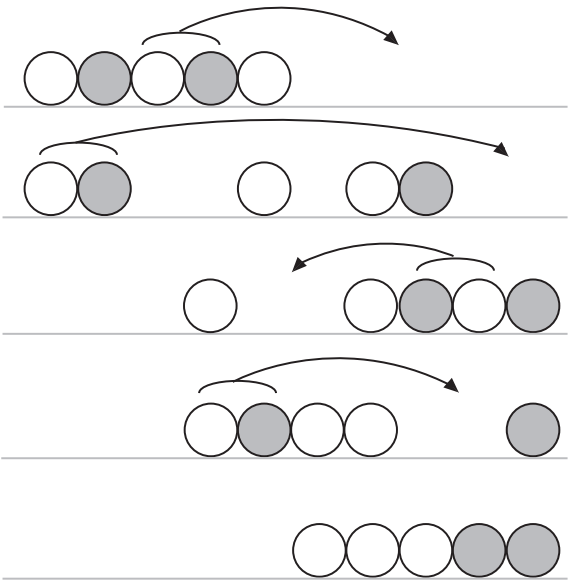
Si le joueur 1 place son cigare à plat au centre, comme illustré ci-dessus, et que le joueur 2 place le sien en D, très près du bout arrondi, alors le joueur 1 ne pourra pas placer le suivant en D' sans toucher le cigare central. Les pièces ne posent pas ce genre de problème.

82. La colle de Tait (p. 153)

Le problème original de Tait se résout de la manière suivante :

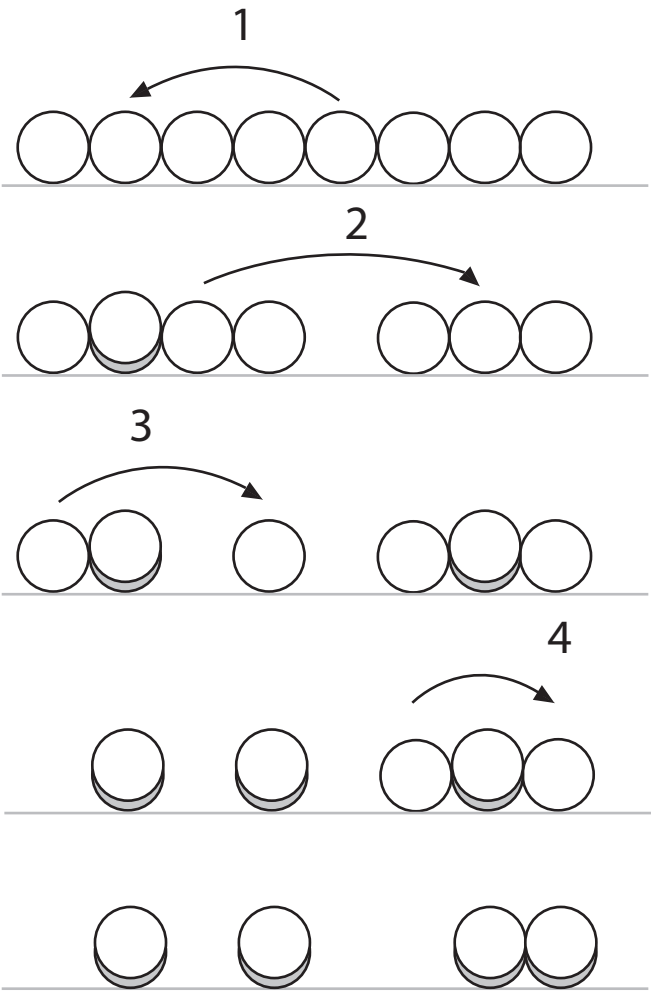


Et celui des cinq pièces comme ceci :

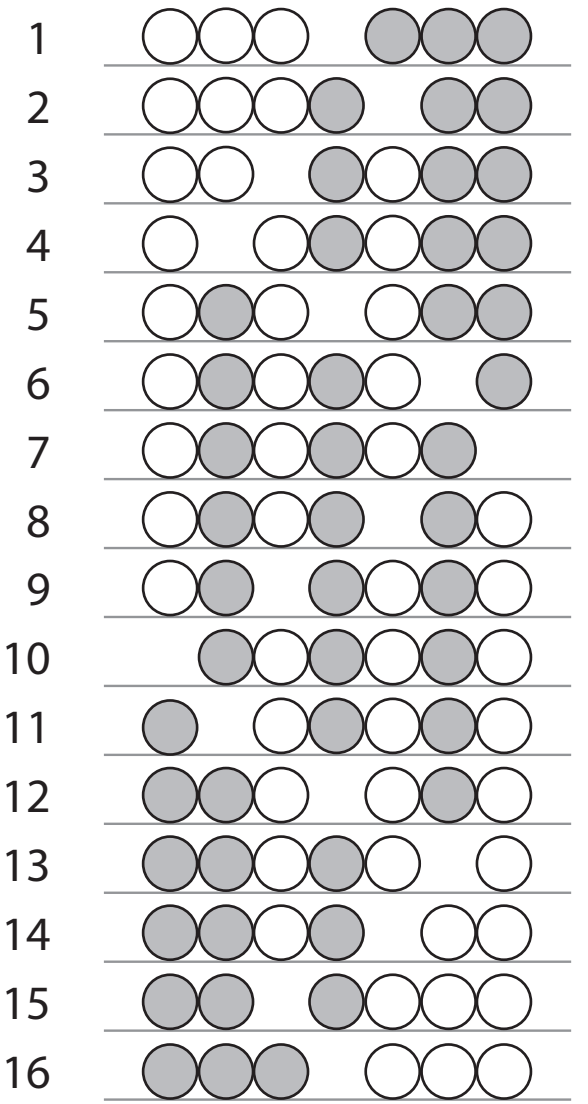


83. Les quatre piles (p. 156)

Déplacez les pièces comme illustré ci-dessous, en suivant les numéros. Les doubles pièces représentent des piles de deux.



84. Grenouilles et crapauds (p. 156)



85. Solitaire triangulaire (p. 157)

Retirons la pièce en position 2 comme auparavant. Curieusement, les premier et dernier coups sont identiques à ceux de la solution en six coups. L'astuce consiste à ne pas finir les sauts au troisième coup.

1) 7 va sur 2.
2) 1 va sur 4.
3) 9 va sur 7, puis sur 2.
4) 6 va sur 4, puis sur 1, puis sur 6.
5) 10 va sur 3.

86. Pièces dans le noir (p. 159)

Si le spectateur vous dit qu'il y a x piles, vous formerez deux groupes comptant le même nombre de piles en choisissant x pièces au hasard et en les retournant.

Ainsi, par exemple, avec trois piles, la stratégie consiste à prendre trois pièces pour premier groupe et à les retourner : elles présenteront un nombre de piles identique à celui des pièces restantes. Et ce quel que soit le groupe de trois pièces choisi.

Si le spectateur vous dit qu'il y a cinq piles, vous formez de même un groupe en choisissant cinq pièces au hasard et en les retournant. Le nombre de piles sera encore identique à celui du groupe des pièces restantes.

Notez que vous ne savez pas combien le groupe des pièces que vous retournez ou le groupe des pièces restantes compte de piles. Mais vous n'avez pas promis un tel résultat. Vous avez seulement annoncé pouvoir scinder les pièces en deux groupes comptant le même nombre de piles. Pour le coup, cette solution remarquablement simple tient presque de la magie !

Essayez plusieurs fois en partant, disons, de trois piles, et en retournant des choix variés de trois pièces. Vous commencerez à comprendre pourquoi le tour fonctionne.

La preuve nécessite toutefois un peu d'algèbre.

Disons que le spectateur nous dise que x pièces se présentent du côté pile sur les dix. Prenons x pièces au hasard, formant un groupe que nous baptisons A. Si toutes ces pièces se présentent du côté pile, alors le groupe B, constitué des pièces restantes, les présente toutes du côté face. En retournant les pièces du groupe A, la totalité des dix pièces se présenteront du côté face et les deux groupes compteront le même nombre de piles, en l'occurrence zéro.

Supposons maintenant qu'aucune pièce du groupe A ne se présente du côté pile, c'est-à-dire que les x piles sont dans le groupe B. Retourner les pièces du groupe A fera alors apparaître x piles, soit là encore un nombre identique à celui du groupe B.

Supposons enfin que certaines pièces du groupe A se présentent du côté pile et certaines du côté face. Si le groupe A compte y faces, ce même groupe comptera $x - y$ piles, tandis que le groupe B comptera y piles. Ainsi, une fois retournées toutes les pièces du groupe A, ce dernier comptera $x - y$ faces et y piles, soit un nombre de piles identique à celui du groupe B.

Ce tour marche quel que soit le nombre total de pièces, pas seulement pour dix. Connaissant le nombre total de piles, vous pouvez scinder les pièces en deux groupes comptant le même nombre de piles en choisissant un nombre de pièces égal au nombre de piles et en les retournant.

87. Les cent pièces (p. 160)

La solution tire parti du fait que 100 est pair.

Numérotons les pièces de 1 à 100. Si Penny commence, elle a moyen d'être certaine de collecter toutes les pièces paires ou toutes les pièces impaires. Si elle vise les pièces

impaires, par exemple, elle commencera la partie en choisissant la pièce 1. Bob prendra ensuite la pièce 2 ou 100, laissant dans les deux cas la possibilité à Penny de choisir une pièce impaire au coup suivant. Une fois cette pièce impaire tirée par Penny, Bob se trouvera encore devant des pièces paires aux deux extrémités, et ainsi de suite, la situation perdurant jusqu'à épuisement des pièces. Et de la même façon, si Penny souhaite toutes les pièces paires, elle commencera par choisir la pièce 100. Bob devra alors choisir la pièce 99 ou la 1, offrant ainsi la possibilité à Penny de prendre une pièce paire au coup suivant, etc.

Pour gagner, Penny additionne donc d'une part les valeurs de toutes les pièces paires et d'autre part les valeurs de toutes les pièces impaires. Selon que le premier résultat est plus ou moins élevé que le second, elle choisira de tirer les pièces paires ou impaires, amassant ainsi la somme en question. Si les deux sommes sont différentes, elle est sûre de gagner ; si elles sont égales, il y aura match nul. Penny empochera donc toujours au moins autant d'argent que son adversaire.

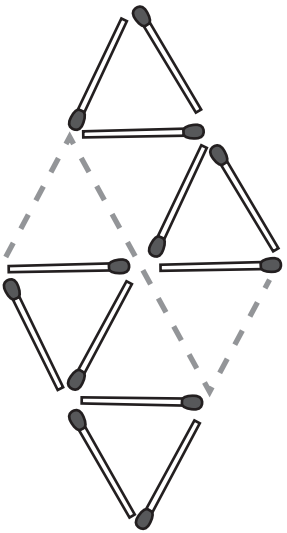
Ajouter une simple pièce 101 au jeu produit cette conséquence fascinante et apparemment paradoxale que l'avantage appartiendra probablement à Bob, alors même qu'il collectera moins de pièces ! En effet, une fois que Penny choisira sa première pièce, il en restera 100 sur la table, ce qui permettra à Bob d'adopter la stratégie précédente : il totalisera les valeurs des pièces paires et celles des pièces impaires, puis collectera les pièces correspondant au résultat le plus élevé. Il ne pourra éventuellement perdre que lorsque la différence entre les deux résultats est inférieure à la valeur de la première pièce choisie par Penny.

Que la parité du nombre de pièces importe plus que leur valeur ou leur nombre total dans la détermination du vainqueur ne laisse pas d'étonner.

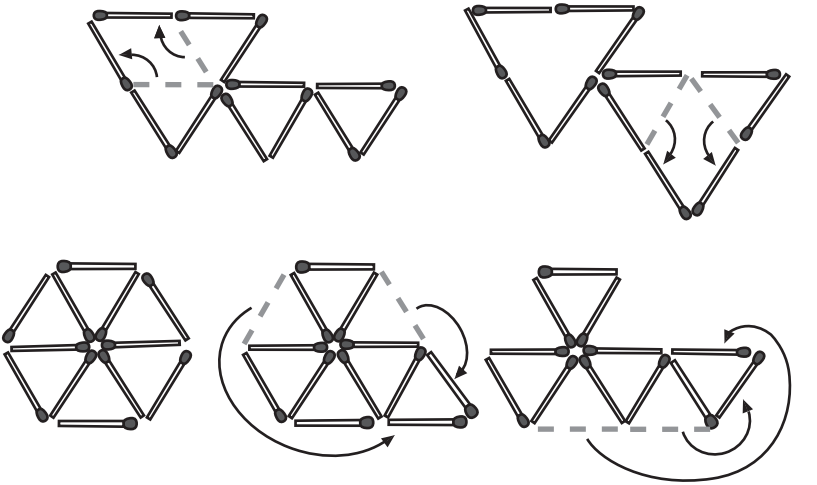
88. Libérez la pièce (p. 161)

Allumez l'allumette avec la flamme d'une autre, puis éteignez-la rapidement. Elle se collera au verre à droite, ce qui vous permettra de déplacer le verre de gauche et de prendre la pièce.

89. Égage de triangles (p. 162)

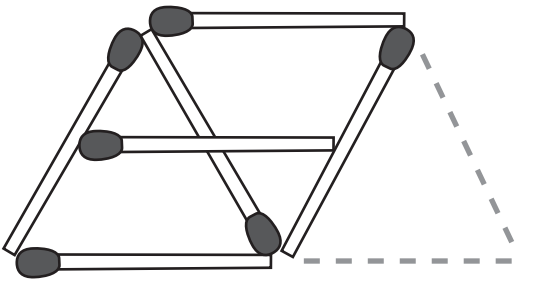


90. Des triangles, encore des triangles, toujours des triangles (p. 162)

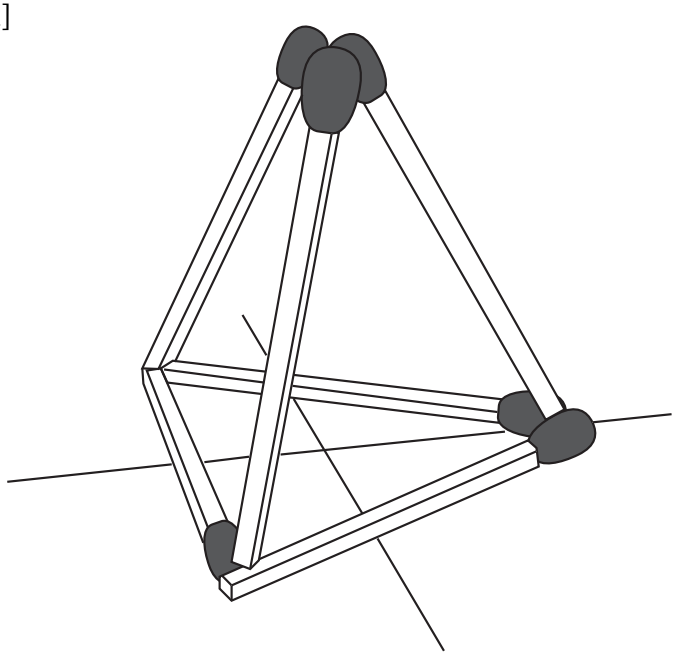


91. Triangles en extension (p. 164)

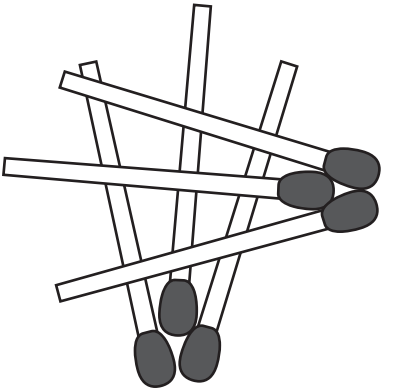
[1]

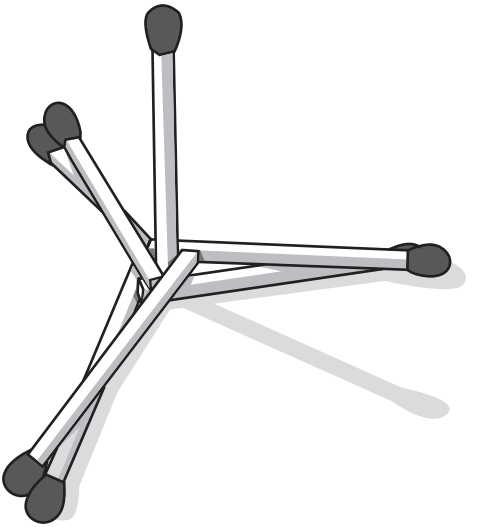


[2]

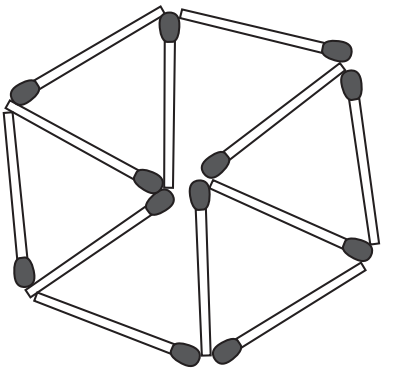


92. À touche-touche (p. 164)

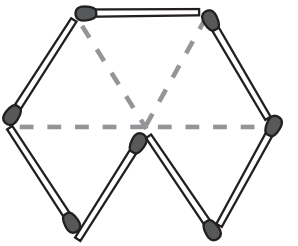


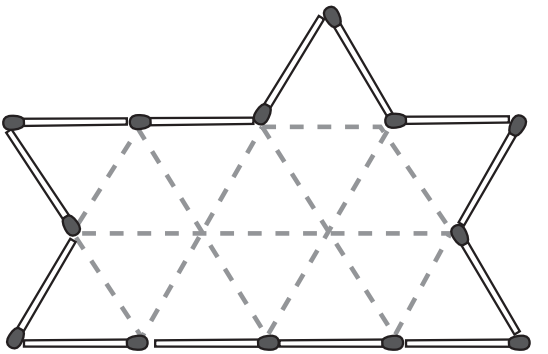


93. Point à point (p. 165)



94. Les deux enclos (p. 165)





95. Pliage de timbres (p. 166)

Pour aboutir à l'ordre 1-5-6-4-8-7-3-2, procédez comme suit :

Étape 1. Pliez de manière à ce que le verso du timbre 6 touche le verso du 7. Maintenez-les ainsi en pinçant leur recto entre le pouce et l'index.

Étape 2. Avec l'autre main, pliez le recto du 4 sur le recto du 8. Maintenez-les ainsi en les pinçant entre le pouce et l'index.

Étape 3. Courbez le 4 et le 8, et glissez-les entre le 6 et le 7. Les timbres 6, 4, 8 et 7 sont maintenant dans le bon ordre.

Étape 4. Redressez la section portant le 1, 2, 5 et 6. Pliez le recto du 5 sur le recto du 6. Terminé !

L'ordre 1-3-7-5-6-8-4-2, dixit Dudeney, « est plus difficile à obtenir et aurait bien pu rester ignoré si [une loi que j'ai découverte] ne m'avait convaincu de sa possibilité ».

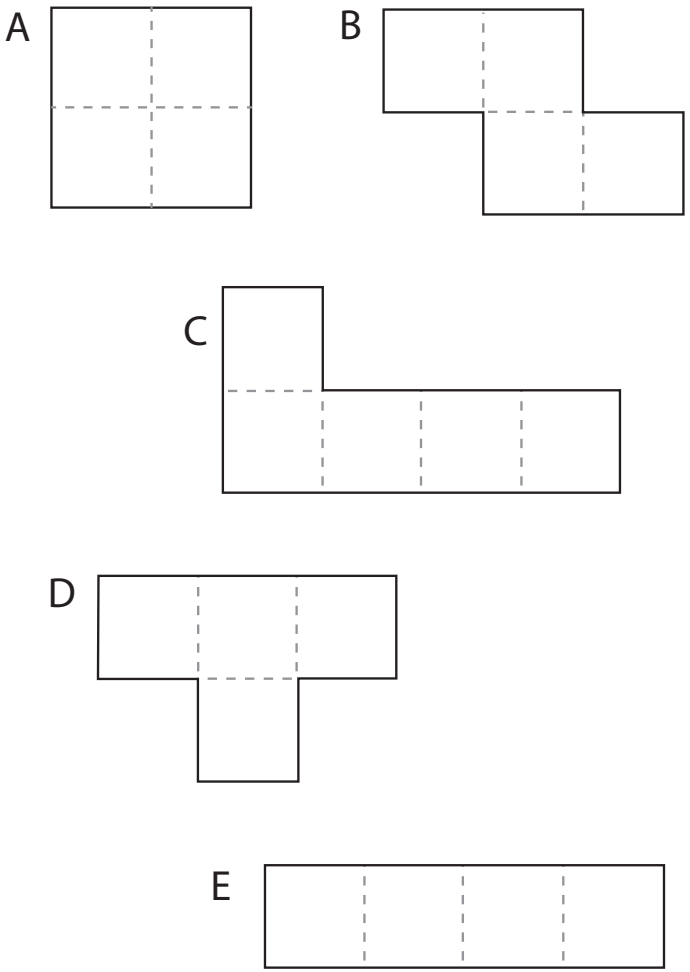
Étape 1. Pliez la planche en deux le long de la ligne horizontale, de manière à ce que les rectos du 1, 2, 3 et 4 soient visibles par l'avant et les rectos du 5, 6, 7 et 8 soient visibles par l'arrière.

Étape 2. Pliez le recto du 5 sur le recto du 6.

Étape 3. D'une main, tenez les timbres de manière à ce que le pouce soit sur 1 et l'index sur 2. De l'autre main, tenez l'autre extrémité de la planche, avec le 8 devant et le 4 derrière. La partie délicate consiste maintenant à enfiler l'extrémité 8/4 entre le 1 et le 5, et ensuite à continuer de tourner de manière à ce que cette extrémité 8/4 se glisse entre le 6 et le 2, laissant seulement le 3 et le 7 entre le 1 et le 5. Et voilà le travail !

96. Les quatre timbres (p. 167)

Les quatre timbres peuvent être découpés selon les formes suivantes :



Il faut veiller à tenir compte de toutes les orientations et les rotations possibles.

La forme A peut être obtenue de **6** façons.

La forme B peut être obtenue de 4 façons, quand elle est présentée comme ci-dessus, et de 3 façons, quand elle est tournée de 90 degrés. La retourner autour d'un axe vertical, de façon à ce que le Z se transforme en S, produit encore 4 façons, puis encore 3 de plus quand le S est tourné de 90 degrés. Soit **14** en tout.

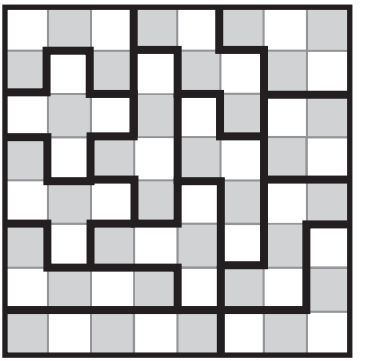
La forme C peut être obtenue de 4 façons, quand elle est présentée comme ci-dessus, de 3 façons, quand elle est tournée de 90 degrés, de 4 façons quand elle est tournée de 180 degrés, et de 3 façons, quand elle est tournée de 270 degrés. Soit déjà 14 façons. La retourner autour d'un axe vertical, à la manière de la forme B, produit 14 façons de plus. Soit **28** en tout.

La forme D peut être obtenue de 4 façons, quand elle est présentée comme ci-dessus, de 3 façons, quand elle est tournée de 90 degrés, de 4 façons, quand elle est tournée de 180 degrés, et de 3 façons, quand elle est tournée de 270 degrés. Soit **14** façons en tout.

La forme E peut être seulement obtenue de **3** façons.

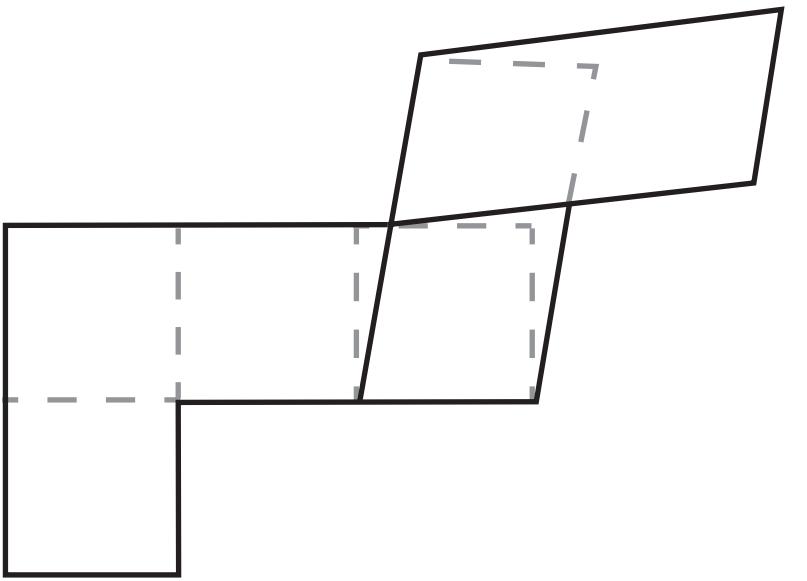
Total général : 6 + 14 + 28 + 14 + 3 = **65** façons.

97. L'échiquier brisé (p. 169)



98. Pliage cubique (p. 170)

Pliez d'abord le morceau de papier après la quatrième et la sixième case. Le cube se construit ensuite facilement.

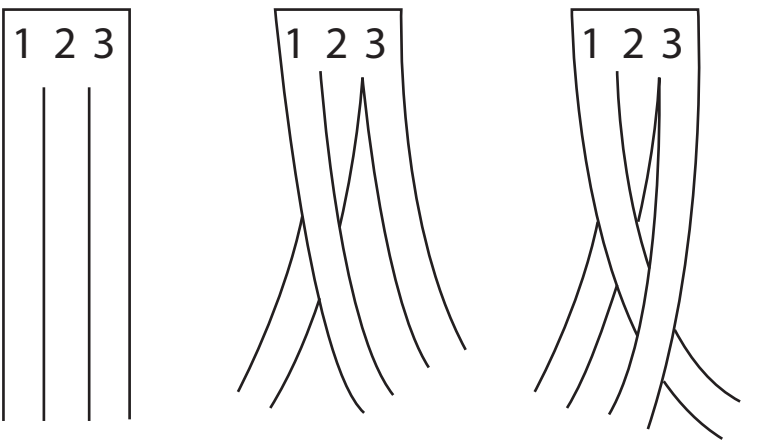


99. La tresse impossible (p. 171)

Ce casse-tête se résout de différentes manières. La méthode la plus rapide demande deux torsions des brins autour d'eux-mêmes, et correspond à la façon dont les scouts et les guides nouent leur bague de foulard. Je ne vais toutefois pas exposer celle-ci, car elle ne se trouve qu'au prix de sérieuses cogitations. (Cette solution se trouve en ligne si elle vous intéresse.)

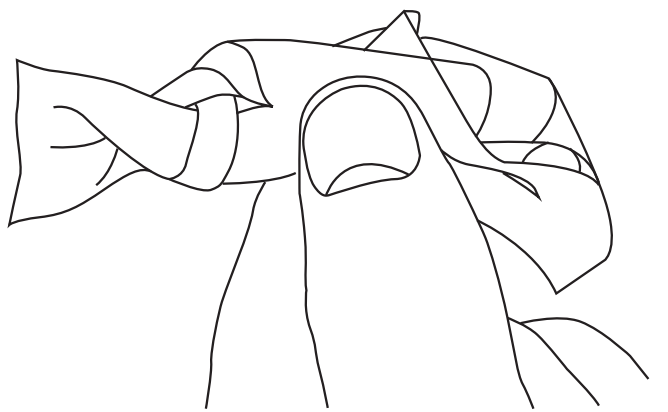
J'apprécie ce casse-tête précisément parce qu'il ne demande que du bon sens. En fait, il est tellement facile à résoudre, une fois le truc compris, qu'il mérite à peine son titre de casse-tête. Il ne s'agit que de suivre les instructions…

Je suppose que vous savez tous tresser : vous passez le brin de gauche sur le brin central, puis le droit sur le central, puis le gauche, et ainsi de suite. Ou, selon les termes de l'illustration ci-dessous, 1 passe sur 2, puis 3 passe sur 1, désormais au centre. L'étape suivante verrait 2 (à gauche) passer sur 3 (au centre), et ainsi de suite.



Or, vous avoir précisé que les brins se croisaient six fois dans la tresse constituait un indice ! Oublions un moment

que les trois brins sont joints aux parties inférieures et supérieures de la bande. Commençons par l'extrémité supérieure et… tressons ! Passons 1 sur 2, puis 3 sur 1, en continuant ainsi quatre croisements de plus, soit six en tout. (L'opération est assez délicate à exécuter, spécialement avec du papier qui a tendance à se déchirer, raison pour laquelle je recommande le plastique.) En tenant le sixième croisement entre le pouce et l'index, vous devriez aboutir à l'espèce d'ignoble machin représenté ci-dessous.



Le problème vient du fait que chaque croisement exécuté vers l'extrémité supérieure est contré par une vilaine torsion à l'autre bout. Après six croisements, le côté à la gauche de mon pouce ressemble à ce que nous cherchons, tandis que la partie à sa droite se présente comme un écrasement de plastique.

Et maintenant ? Eh bien, essayons de démêler le fouillis à droite du pouce et de l'index à l'aide de l'autre main. En faisant passer l'extrémité droite à travers elle-même un certain nombre de fois, les brins vont parfaitement se démêler. Il ne reste ensuite qu'à réajuster de manière à répartir uniformément les croisements le long des brins. La tresse impossible est possible, après tout.

La solution ne brille pas par son élégance, mais elle fonctionne. Parfois la solution à un problème est la plus immédiate : l'énoncé dit de tresser ? Alors tressez !

En guise d'apéritif. *Êes-vous plus intelligent qu'un enfant de 13 ans ?* (p. 178)

1) B

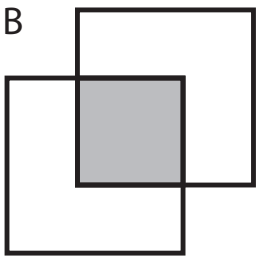
Les affirmations étant toutes contradictoires, une au plus est vraie. Et si l'une est vraie, ce doit être la deuxième, effectivement vraie.

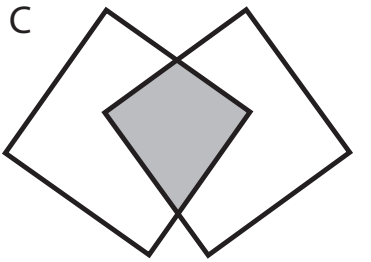
2) A

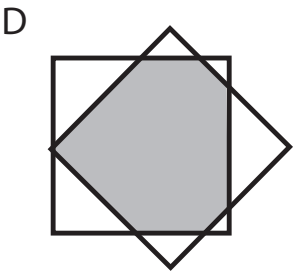
Si la région de chevauchement est triangulaire, deux de ses côtés constituent les côtés adjacents d'un carré, soit un angle de 90 degrés. Comme tous les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60 degrés, cette figure est impossible à obtenir. À l'inverse, la figure page suivante illustre comment produire les autres formes proposées.

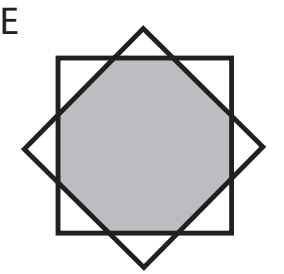
3) D

Les chiffres des unités des deux côtés des égalités nous indiquent celle qui est correcte. Le chiffre des unités de $44^2 + 77^2$ est 5, car le chiffre des unités de 4^2 est 6 et le chiffre des unités de 7^2 est 9. De même, le chiffre des unités de $55^2 + 66^2$ et $66^2 + 55^2$ est 1, tandis que celui de $99^2 + 22^2$ est 5. Donc toutes les égalités associées sont fausses.









Et celle qui reste est bien vraie :

$$88^2 + 33^2 = 7\,744 + 1\,089 = 8\,833.$$

4) D

Il faut clairement un nombre minimal de deux interrupteurs en position « Marche ». Deux interrupteurs sur « Marche » et trois sur « Arrêt » ne peuvent que se configurer ainsi : « Arrêt », « Marche », « Arrêt », « Marche », « Arrêt ». Trois interrupteurs sur « Marche » et deux sur « Arrêt » peuvent se disposer de six façons différentes. Quatre interrupteurs sur « Marche » et un « Arrêt » peuvent se disposer de cinq façons différentes. Et cinq interrupteurs sur « Marche » ne peuvent se disposer d'une seule façon.

5) C

Considérons les deux lettres les plus à gauche du résultat, soit S et E. Comme elles proviennent de l'addition de H et H, soit 8 + 8 = 16, et d'une éventuelle retenue 1, S ne peut valoir que 1 et E ne peut valoir que 6 ou 7. Mais E résulte par ailleurs à droite de l'addition de T et T, de sorte que E ne peut valoir que 6 et T ne peut valoir que 3. En outre, la retenue évoquée précédemment est nulle, si bien que U est plus petit ou égal à 4 et I = U + U + retenue éventuelle.

Supposons d'abord que cette nouvelle retenue soit nulle. Comme des lettres distinctes représentent des chiffres distincts, U ne peut valoir 0, car I vaudrait aussi 0 ; U ne peut valoir 1, que représente déjà S ; U ne peut valoir 3 ou 4, car I vaudrait 6 ou 8, valeurs déjà représentées par E et H. Donc U vaudrait 2 et I vaudrait 4. Mais si I valait 4, Z = I + I vaudrait 8, valeur déjà représentée par H. Donc la dernière retenue évoquée n'est pas nulle.

Dans ce cas, U ne peut toujours pas valoir 0, car I vaudrait 1, valeur déjà représentée par S ; U ne peut pas non plus valoir 1, encore en raison du S, ni 3 déjà représenté par T. La lettre U vaut donc 2 ou 4, et I vaut 5 ou 9. Mais si I valait 9, Z, le dernier chiffre de I + I, vaudrait 8, déjà représenté par H. Donc U vaut 2, I vaut 5 et Z vaut 0, valeurs qui s'ajoutent à celles déjà trouvées : H = 8, S = 1, E = 6 et T = 3.

Conclusion : T × I = 3 × 5 = 15.

6) D

Cela ne survient que lorsque l'horloge passe de 09 59 59 à 10 00 00, de 19 59 59 à 20 00 00 et de 23 59 59 à 00 00 00.

7) D

Les six premiers cubes positifs sont 1, 8, 27, 64, 125 et 216. Il est clairement impossible que 64 soit la

somme de trois cubes positifs distincts, car la plus grande somme de ce type inférieure à 64 vaut 1 + 8 + 27 = 36. Il est de même impossible que 125 soit la somme de trois cubes positifs distincts, car la plus grande somme de ce type inférieure à 125 vaut 8 + 27 + 64 = 99. En revanche, 216 = 27 + 64 + 125 = 216. Le nombre 216 est donc le résultat recherché.

8) C

Comme – 3, 0 et 2 sont les trois premiers termes, le quatrième vaut –3 + 0 + 2 = – 1. Donc le cinquième vaut 0 + 2 –1 = 1, et ainsi de suite. On trouve ainsi que les treize premiers termes de la suite sont : – 3, 0, 2, – 1, 1, 2, 2, 5, 9, 16, 30, 55, 101.

9) C

Les pages de 1 à 9 nécessitent 9 chiffres ; les pages de 10 à 99 nécessitent 180 chiffres. Il faut donc 189 chiffres pour numéroter toutes les pages avant le premier numéro à trois chiffres, page 100. Restent ensuite 852 – 189 = 663 chiffres, qui comptent pour 221 pages. Le livre fait donc 9 + 90 + 221 = 320 pages.

10) B

Imaginons la croix constituée de trois couches horizontales : la première seulement formée du cube collé à la face supérieure du cube original, la deuxième formée du cube original et des quatre cubes collés à ses faces latérales, la troisième seulement formée du cube collé à la face inférieure du cube original. Un cube jaune est ensuite ajouté à la face supérieure du cube bleu de la première couche et quatre sur ses faces latérales, huit autres aux cubes bleus de la deuxième couche, et cinq autres au seul cube bleu de la troisième couche. Il faudra donc en tout 18 cubes jaunes.

101. Miroir, Miroir (p. 184)

Les totaux sont identiques ! Ce résultat paraît surprenant jusqu'à ce que vous considériez le calcul colonne par colonne. Peut-être convient-il ici de commencer à parler à voix haute ? La première colonne de l'addition de gauche contient un 9, ou 1 × 9, tandis que la première colonne de l'addition à droite contient neuf 1, ou 9 × 1. La deuxième colonne de l'addition de gauche contient deux 8, ou 2 × 8, alors que la deuxième colonne de l'addition à droite contient huit 2, ou 8 × 2. Et ainsi de suite. Chaque colonne produit le même résultat, d'où les sommes finales identiques.

102. Dans l'esprit de Gauss (p. 184)

En disposant les nombres les uns au-dessus des autres, comme pour procéder à une gigantesque addition, survient l'idée « gaussienne » que chaque colonne – celle des unités, des dizaines, des centaines et des milliers – présente les mêmes chiffres dans un ordre différent, en l'occurrence six 1, six 2, six 3 et six 4. La somme se calcule facilement sur chaque colonne : (6 × 1) + (6 × 2) + (6 × 3) + (6 × 4) = 6 + 12 + 18 + 24 = 60.

Soit le résultat final suivant :

```
   60
  60
 60
60
66660
```

103. La table d'addition (p. 185)

Peut-être avez-vous résolu ce problème de deux manières différentes ? Selon ce que j'appelle respectivement les

méthodes d'Alcuin et de Gauss, du fait qu'elles se calquent plutôt sur la façon donc chacun appariait les nombres de 1 à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Méthode d'Alcuin. Couplons sur chaque diagonale les nombres du haut à gauche avec ceux du bas à droite. Apparaîtront un exemplaire de (1 + 19) = 20, deux exemplaires de (2 + 18) = 20, trois exemplaires (3 + 17) = 20 et ainsi de suite jusqu'à neuf exemplaires de (9 + 11) = 20. Ces paires forment un total de 20 + (2 × 20) + (3 × 20) + … + (9 × 20), ou (1 + 2 + 3 + … + 9) × 20, soit 45 × 20 = 900. Il faut encore ajouter les dix 10 en diagonale que nous n'avons pas encore pris en compte. Résultat final : 900 + 100 = 1 000.

Méthode de Gauss. La somme de la première ligne vaut (1 + 10) + (2 + 9) + … + (5 + 6) = 5 × 11 = 55. Les nombres figurant sur la deuxième ligne sont les nombres de la première ligne augmentés d'une unité. Leur somme vaut donc la somme précédente plus 10. De même, la somme des nombres de la troisième ligne vaut la somme précédente plus 10, ou encore la première somme plus 20. Le raisonnement poursuivi sur la totalité du tableau aboutit à 55 + (55 + 10) + (55 + 20) + … + (55 + 90), ou (10 × 55) + (10 + 20 + 30 + … + 90), soit 550 + 10(1 + 2 + 3 + … + 9) = 550 + (10 × 45) = 550 + 450 = 1 000.

104. Le carré de chiffres (p. 186)

Certains chiffres s'éliminent d'office de certaines positions : 1, par exemple, ne peut se trouver dans la multiplication, car multiplier par 1 ne change pas le chiffre de départ et chaque chiffre n'apparaît qu'une fois. La résolution de ce type de problèmes passe toutefois par une large part de tâtonnements.

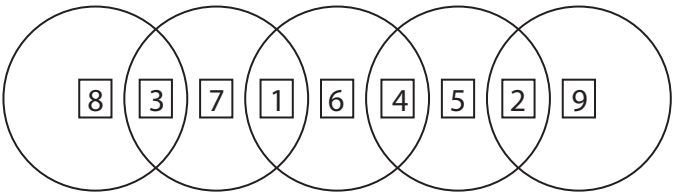
$$\begin{array}{c} 9 - 5 = 4 \\ \times \\ 6 \div 3 = 2 \\ = \\ 1 + 7 = 8 \end{array}$$

105. Les équations fantômes (p. 186)

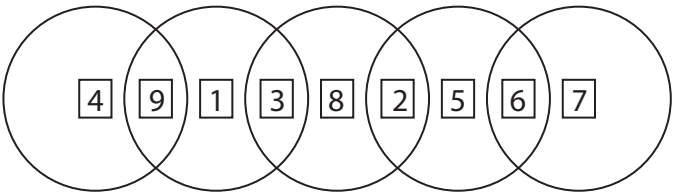
$$\begin{array}{c} 27 \times 3 = 81 \\ 6 \times 9 = 54 \end{array}$$

106. Le numéro que vous avez demandé... (p. 186)

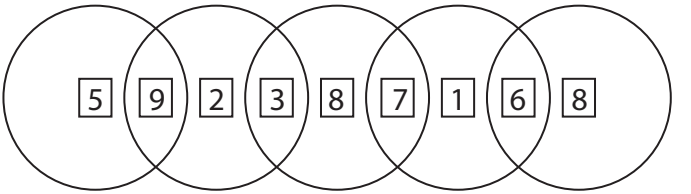
Somme de 11 :



Somme de 13 :



Somme de 14 :



107. Les quatre quatre (p. 188)

Il existe souvent d'autres solutions que celles présentées ci-dessous.

De 2 à 9 :

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4}$$

$$4 = 4 + 4 \times (4 - 4)$$

$$5 = \frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

$$6 = \frac{4+4}{4} + 4$$

$$7 = 4 + 4 - \frac{4}{4}$$

$$8 = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4}$$

De 10 à 20 :

$$10 = \frac{4}{\sqrt{4} + 4 \times \sqrt{4}}$$

$$11 = \frac{44}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}$$

$$12 = 4 \times (4 - \frac{4}{4})$$

$$13 = \frac{44}{4} + \sqrt{4}$$

$$14 = 4 \times 4 - 4 + \sqrt{4}$$

$$15 = 4 \times 4 - \frac{4}{4}$$

$$16 = 4 \times 4 + 4 - 4$$

$$17 = 4 \times 4 + \frac{4}{4}$$

$$18 = 4 \times 4 + 4 - \sqrt{4}$$

$$19 = \frac{4+\sqrt{4}}{0{,}4} + 4$$

$$20 = (4 + \frac{4}{4}) \times 4$$

De 21 à 30 :

$$21 = 4! - 4 + \frac{4}{4}$$

$$22 = 4 \times 4 + 4 + \sqrt{4}$$

$$23 = \frac{4! - \sqrt{4} + 4}{4}$$

$$24 = 4 \times 4 + 4 + 4$$

$$25 = \frac{4! + \sqrt{4} - 4}{4}$$

$$26 = 4 ! + \sqrt{4+4-4}$$

$$27 = 4! + 4 - \frac{4}{4}$$

$$28 = (4 + 4) \times 4 - 4$$

$$29 = 4! + 4 + \frac{4}{4}$$

$$30 = 4! + 4 + 4 - \sqrt{4}$$

De 31 à 40 :

$$31 = \frac{(4+\sqrt{4})! + 4!}{4!}$$

$$32 = (4 \times 4) + (4 \times 4)$$

$$33 = 4! + 4 + \frac{\sqrt{4}}{0{,}4}$$

$$34 = 4 \times 4 \times \sqrt{4} + \sqrt{4}$$

$$35 = 4! + \frac{44}{4}$$

$$36 = 44 - 4 - 4$$

$$37 = 4! + \frac{4! + \sqrt{4}}{\sqrt{4}}$$

$$38 = 44 - \frac{4!}{4}$$

$$39 = 4! + \frac{4}{4 \times 0{,}4} \times \frac{4!}{4 \times 0{,}4}$$

$$40 = 4! - 4 + 4 + 4! - 4$$

De 41 à 50 :

$$41 = \frac{4! + \sqrt{4}}{0{,}4} - 4!$$

$$42 = 44 - 4 + \sqrt{4}$$

$$43 = 44 - \frac{4}{4}$$

$$44 = 44 + 4 - 4$$

$$45 = 44 + \frac{4}{4}$$

$$46 = 44 + 4 - \sqrt{4}$$

$$47 = 4! + 4! - \frac{4}{4}$$

$$48 = (4 + 4 + 4) \times 4$$

$$49 = 4! + 4! + \frac{4}{4}$$

$$50 = 44 + 4 + \sqrt{4}$$

(Avec mes remerciements au site mathforum.org à qui j'ai emprunté certaines solutions.)

108. Notre œuf de Colomb (p. 191)

$80,\dot{5}$ (ou 80 + 55/99)
$0,\dot{9}\dot{7}$ (ou 97/99)
$+\ 0,\dot{4}\dot{6}$ (ou 46/99)
82

Les fractions s'annulent heureusement :

$$55/99 + 97/99 + 46/99 = 198/99 = 2$$

109. Des trois et des huit (p. 191)

$$24 = \frac{8}{(3-\left(\frac{8}{3}\right))}$$

110. Un jeu d'enfant (p. 192)

Qu'un énoncé suggère qu'un enfant se débrouillera mieux qu'un adulte laisse souvent présager d'un problème moins axé sur la réflexion que sur la reconnaissance visuelle. Face à une liste de nombres, les adultes commenceront instinctivement à penser calcul. Ici, toutefois, les nombres ne sont que des formes dépourvues de signification. Comptez les nombres de boucles dans chaque nombre à quatre chiffres, et vous trouverez ce qu'il y a à droite du signe égal. Ainsi, 8 compte deux boucles, 0 une et 9 une, donc 8809 en compte six. De même, 2581 compte deux boucles.

111. Suivez la flèche (I) (p. 192)

J'espère que vous ne vous êtes pas trop usé les neurones. La règle est très simple : il suffit de multiplier les chiffres d'un nombre pour obtenir le suivant. Ainsi : $7 \times 7 = 49$, $4 \times 9 = 36$, $3 \times 6 = 18$.

Le nombre manquant est donc $1 \times 8 = 8$.

112. Suivez la flèche (II) (p. 193)

La règle consiste à élever au carré chaque chiffre composant le nombre et additionner ces résultats pour obtenir le suivant. Ainsi : $4^2 = 16$, $1^2 + 6^2 = 37$, $3^2 + 7^2 = 58$, etc. Le nombre manquant est donc $4^2 + 2^2 = 20$, nombre qui vérifie par ailleurs $2^2 + 0^2 = 4$.

J'ai résolu ce casse-tête après m'être arrêté longtemps devant $4 \rightarrow 16$, prenant ainsi conscience que la solution impliquait certainement l'élévation au carré. L'étape suivante a été de comprendre comment cette élévation faisait passer de 16 à 37. Le reste est venu ensuite.

113. Suivez la flèche (III) (p. 193)

Ce casse-tête est particulièrement retors quand on ne le connaît pas : aucune règle arithmétique, en effet, ne semble engendrer la suite de nombres proposée.

Le truc se laisse découvrir en écrivant ces nombres en toutes lettres :

Un
Six
Zéro
Trois
Quatre

Cent un

Le nombre de caractères augmente d'une unité à chaque fois. Ainsi le premier nombre de la liste est formé de deux lettres, le deuxième de trois, le troisième de quatre et les suivants de cinq, six et sept caractères.

Le suivant doit donc en compter huit. Mais plusieurs nombres vérifient cette propriété, comme dix-huit, quarante ou cent dix ! Alors lequel choisir ?

Revenons à la liste pour approfondir la question.

L'unique nombre à deux caractères est un.

Les seuls nombres à trois caractères sont six et dix.

Les seuls nombres à quatre caractères sont zéro, deux, cinq, sept, huit, neuf, onze, cent.

Vous avez compris le truc ? Chaque nombre de la suite est le plus petit dans la classe considérée. Cette propriété se vérifie encore sur les autres termes de la liste.

Le nombre que nous recherchons est le plus petit qui s'écrive avec huit caractères, soit quatorze.

114. Le coin du dictionnaire (p. 195)

Le dictionnaire compte donc un billiard d'articles. Ces derniers commencent par « un », « deux », trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf », « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille ».

Le premier article est donc « cent ».

Le dernier article doit commencer par le dernier mot dans l'ordre alphabétique de la liste ci-dessus, soit « vingt ». Il ne peut s'agir de ce mot seul, car il est suivi dans le dictionnaire des mots composés à partir de lui, à savoir ceux qui commencent par « vingt et un », « vingt-deux », « vingt-trois », etc.,

« vingt mille », « vingt millions », « vingt milliards » et « vingt billions », et plus précisément « vingt-trois ». Ce nouveau mot est lui-même suivi de « millions », le dernier dans l'ordre alphabétique entre « mille », « millions », « milliards » « billions », lui-même suivi de « vingt-trois », puis de « mille », puis de « vingt-trois », soit « vingt-trois millions vingt-trois mille vingt-trois », ou 23 023 023.

La première entrée impaire doit commencer par « cent », un nombre pair, et doit donc continuer, en l'occurrence avec « billions », la première possibilité dans l'ordre alphabétique, ce qui forme « cent billions », un nombre toujours pair. L'entrée continue donc avec « cent », formant ainsi « cent billions cent », un nombre toujours pair, puis avec « cinq », formant ainsi « cent billions cent cinq », soit le nombre enfin impair 100 000 000 000 105.

La dernière entrée impaire est tout simplement la dernière entrée du dictionnaire déjà trouvée : « vingt-trois millions vingt-trois mille vingt-trois », soit 23 023 023.

Problème Bonus (p. 195)

Nous sommes donc parvenus à :

$$\begin{array}{r} \ 9\ \mathrm{E}\ \mathrm{N}\ \mathrm{D} \\ +\ \ 1\ \mathrm{O}\ \mathrm{R}\ \mathrm{E} \\ \hline =1\ \mathrm{O}\ \mathrm{N}\ \mathrm{E}\ \mathrm{Y} \end{array}$$

Une retenue dans la colonne des milliers conduirait à 1 + 9 + 1 = 1O (où O désigne la lettre o en capitale), soit O = 1, une impossibilité du fait que la valeur 1 est déjà prise par M. Il n'y a donc pas de retenue dans la colonne des milliers,

ce qui signifie que O = 0. (Une valeur parfaite pour nous éviter de songer à distinguer le O du 0.)

La colonne des centaines doit toutefois produire une retenue pour que l'égalité E + 0 = N, soit E = N, ne contredise pas la règle voulant que des lettres distinctes représentent des chiffres distincts. Notre addition affecte maintenant la forme suivante :

$$\begin{array}{rcccccc} & & & 1 & x & & \\ & & 9 & E & N & D & \\ + & & 1 & 0 & R & E & \\ \hline = & 1 & 0 & N & E & Y & \end{array}$$

J'ai ajouté un x dans l'espace réservé à la retenue de la colonne des dizaines, que ce x vaille 1 s'il y a effectivement une retenue ou qu'il vaille 0 s'il n'y en a pas. Cette notation permet d'écrire les trois équations suivantes, à partir des colonnes restantes.

Colonne des centaines : E + 1 = N

Colonne des dizaines : x + N + R = 10 + E (Le 10 compte pour la retenue.)

Colonne des unités : D + E = Y + 10x

Si x = 0, en substituant N par E + 1 dans la seconde équation, nous obtenons E + 1 + R = 10 + E, soit R = 9, une valeur déjà prise par S. Donc x = 1. Les équations précédentes s'écrivent alors :

$$E + 1 = N$$
$$N + R = 9 + E$$
$$D + E = Y + 10$$

En remplaçant N par E + 1 dans la deuxième équation, nous obtenons E + 1 + R = 9 + E, soit R = 8.

$$\begin{array}{rccccc} & & & 1 & 1 & \\ & & 9 & E & N & D \\ + & & 1 & 0 & 8 & E \\ \hline = & 1 & 0 & N & E & Y \end{array}$$

Reste alors :

$$E + 1 = N$$
$$D + E = Y + 10$$

Comme les valeurs 0 et 1 sont déjà utilisées, Y doit être supérieur ou égal à 2. D'où $D + E \geq 12$. Comme 9 et 8 sont déjà utilisés, les seules valeurs possibles pour D et E sont 6 et 7 (ou *vice versa*) ou 5 et 7 (ou *vice versa*).

Considérons le premier cas. Si E = 6, D = 7, ce qui, conduisant à N = E + 1 = 7, contredit le fait que deux lettres distinctes correspondent à des chiffres distincts. Si E = 7, l'équation E + 1 = N aboutit cette fois à N = 8, valeur déjà prise par R.

Donc D et E correspondent respectivement à 5 et 7 ou à 7 et 5.

Mais E ne peut valoir 7 pour la raison précédente, à savoir que N ne peut valoir 8. Donc D = 7, E = 5, Y = 2 et N = 6.

$$\begin{array}{rccccc} & & & 1 & 1 & \\ & & 9 & 5 & 6 & 7 \\ + & & 1 & 0 & 8 & 5 \\ \hline = & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

115. Le carré de valets (p. 199)

En colonne des unités, T ne peut valoir 0 car E vaudrait également 0. Comme la valeur de T détermine celle de E, la retenue de la colonne des dizaines, la valeur de R et la retenue de la colonne des centaines, les deux retenues doivent être de même parité pour donner R dans la colonne des dizaines et des centaines. Ces conditions ne se vérifient que pour T = 5, soit E = 0 et R = 2, ou T = 8, soit E = 2 et R = 1.

En première colonne, V ne peut valoir que 1 ou 2, pour que le résultat soit seulement formé de cinq chiffres, ce qui élimine la seconde des possibilités précédentes. Par suite, V = 1 car la valeur 2 est déjà prise par R, soit en tout à ce stade : T = 5, E = 0, R = 2, V = 1, ainsi que 2 en retenue de la colonne des dizaines et 0 en retenue de la colonne des centaines.

```
        0 2
    1 A L 0 5
    1 A L 0 5
    1 A L 0 5
+   1 A L 0 5
-------------
    C A 2 2 0
```

Dans cette colonne des centaines, nous avons donc L + L + L + L = 2 et une éventuelle retenue, ce qui signifie que L = 3 ou L = 8. Supposer L = 3 conduit à une retenue 1 en colonne des milliers, puis à A = 3, une valeur précisément déjà prise par L. D'où L = 8, puis une retenue de 3 en colonne des milliers, et finalement A = 9, puis C = 7.

$$\begin{array}{rr} & 1\,9\,8\,0\,5 \\ & 1\,9\,8\,0\,5 \\ & 1\,9\,8\,0\,5 \\ + & 1\,9\,8\,0\,5 \\ \hline & 7\,9\,2\,2\,0 \end{array}$$

116. Pairs et impairs (p. 200)

Cette multiplication se décompose selon les deux multiplications plus « petites » suivantes :

[1] PPI × I = PIPI et [2] PPI × I = PII

Commençons par [2]. L'équation affirme que le nombre à trois chiffres PPI (le *multiplicande*) multiplié par le nombre impair I (le *multiplicateur*) est égal à un nombre à trois chiffres. Le multiplicateur ne peut pas valoir 1, autrement le résultat serait égal au multiplicande, ce qui n'est pas le cas. Le multiplicande commence par un nombre pair et doit donc valoir au moins 201.

Par suite, le multiplicateur ne peut pas valoir 5 ou plus, car 201 × 5 = 1 005 est un nombre à quatre chiffres, alors que le résultat ne présente que trois chiffres. Nous en déduisons que le multiplicateur vaut 3. Et dans ce cas, le premier chiffre du multiplicande vaut 2, car s'il valait 4 ou plus, le résultat présenterait encore quatre chiffres. Nous avons donc obtenu :

[2] 2PI × 3 = PII

Le chiffre des dizaines du multiplicande est pair, mais le chiffre des dizaines du résultat est impair. Comme la multiplication d'un chiffre pair par 3 donne un chiffre pair, la seule façon d'assurer la validité du calcul passe par une retenue impaire lors de la multiplication du chiffre des unités du multiplicande par 3.

Les options pour ce chiffre des unités du multiplicande se restreignent à 5, 7 et 9, car 1 et 3 ne génèrent pas de retenues lors d'une multiplication par 3. Si le chiffre des unités vaut 5, la retenue vaudra 1 (car 5 × 3 = 15), alors que s'il vaut 7 ou 9, la retenue vaudra 2 (car 7 × 3 = 21 et 9 × 3 = 27). La retenue étant impaire, le chiffre des unités du multiplicande vaut 5.

[2] 2P5 × 3 = PII

Le chiffre des dizaines du multiplicande vaut a priori 0, 2, 4, 6 ou 8. Nous pouvons toutefois éliminer 4 et 6, car 245 × 3 = 735 et 265 × 3 = 795, autant de résultats qui ne commencent pas par un chiffre pair. Le multiplicande vaut donc 205, 225 ou 285.

Fort de cette constatation, revenons à l'équation [1], qui prend l'une de ces trois formes possibles :

[a] 205 × I = PIPI

[b] 225 × I = PIPI

[c] 285 × I = PIPI

Comme le premier chiffre du résultat est pair, ce résultat doit être supérieur à 2000. Or un multiplicateur de 1, 3, 5 ou 7 conduit à un résultat pour [a], [b] ou [c] inférieur à 2 000. Et un multiplicateur 9, ne convient qu'à l'équation [c] : en effet, dans [a], le résultat serait inférieur à 2 000, dans [b], ce résultat vaudrait certes 2 025, mais son deuxième chiffre ne serait pas impair. Nous obtenons donc :

[1] 285 × 9 = 2 565

L'opération se complète ensuite facilement :

$$\begin{array}{r} 2\,8\,5 \\ \times\quad 3\,9 \\ \hline 2\,5\,6\,5 \\ 8\,5\,5\;\; \\ \hline 1\,1\,1\,1\,5 \end{array}$$

117. L'autobiographie à dix chiffres (p. 203)

J'aborde ce casse-tête d'une manière systématique, en commençant par des propositions clairement erronées qui s'affinent petit à petit. Le but consiste donc à remplir la seconde ligne du tableau, de façon à ce que chaque chiffre décrive le nombre d'occurrences dans cette même seconde ligne du chiffre situé au-dessus de lui.

Supposons que le nombre recherché commence par 9.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9									

Notre nombre devrait alors compter neuf zéros, c'est-à-dire que tous ses autres chiffres devraient être 0, ce qui est impossible puisqu'il compte un 9.

Supposons maintenant que notre nombre commence par 8.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8									

Il faudrait donc huit 0 parmi les neuf positions restantes. Comme nous avons au moins un 8, le nombre au-dessous

de ce 8 (appelons-le *x*) doit être non nul, ce qui donne la position de tous les 0.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	*x*	**0**

Mais aucune valeur de *x* ne convient : ce ne peut être 1, qui contredirait le 0 en deuxième position, ni aucun autre chiffre, pour la même raison.

Avant de poursuivre, notons que la somme des nombres de la seconde ligne doit donner 10. En effet, chaque nombre qu'elle contient désigne le nombre de fois qu'un chiffre particulier y apparaît et cette ligne compte 10 positions.

Supposons maintenant que le nombre commence par 7.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7									

Nous savons que la seconde ligne compte sept 0. Comme le nombre final compte au moins un 7, nous savons aussi que le nombre sous le 7 de la première ligne n'est pas nul et vaut 1, 2 ou 3. (S'il était supérieur à 3, la somme des chiffres dépasserait 10.) Mais aucune de ces options ne convient. Si le nombre sous le 7 vaut 1, alors le nombre sous le 1 ne serait pas nul. Or ce nombre lui-même ne peut pas valoir 1, car nous aurions deux 1 dans le nombre final. Le nombre sous le 1 ne peut pas être 2, car le nombre sous le 2 ne serait pas nul, contredisant ensuite le fait qu'il y a sept 0. Par une logique similaire, nous pourrions montrer que 2 et 3 ne peuvent se positionner non plus sous le 7.

Passons au 6.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6									

Comme il y a six zéros, le nombre situé sous le 6 n'est pas 0. Disons qu'il s'agit de 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6						**1**			

En conséquence, le nombre situé sous le 1 n'est pas 0 non plus. Comme la somme des nombres de la ligne inférieure doit valoir 10, ce nombre sous le 1 ne peut valoir que 1, 2 ou 3. La première option donnerait deux 1 dans la ligne inférieure, une contradiction. S'il s'agissait de 2, alors le nombre situé sous le 2 devrait être 1, afin que la somme fasse 10. Cette option paraît prometteuse. Il reste six espaces vides, qui doivent correspondre aux six 0. Et le problème est résolu !

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**

118. Pandémonium pandigital (p. 203)

Il existe 10 × 9 × 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 3 628 800 façons de permuter dix chiffres. Chacune de ces permutations correspond à un nombre pandigital, excepté celles qui font commencer ce nombre par 0 (c'est-à-dire un nombre à 9 chiffres plutôt qu'à 10). Comme il existe 9 × 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 362 880 permutations de ce type, le nombre de pandigitaux cherché vaut donc 3 628 800 – 362 880 = 3 265 920.

119. Pandigital et pandivisible (p. 204)

Nous allons trouver les chiffres un à un, en commençant par le dernier proposé : comme tout nombre divisible par 10 se termine par 0, $j = 0$. Dans le même esprit, comme tout nombre divisible par 5 se termine par 0 ou 5, $e = 5$.

Avec ces deux chiffres marqués en clair, notre nombre prend la tournure suivante : *abcd*5*fghi*0.

Si un nombre est divisible par un nombre pair, alors le nombre lui-même doit être pair, ce qui signifie que *b*, *d*, *f* et *h* sont pairs et se répartissent entre 2, 4, 6 et 8. Les inconnues restantes, *a*, *c*, *g* et *i* se répartissent quant à elles entre les nombres (impairs) qui restent, c'est-à-dire 1, 3, 7 et 9.

Faisons entrer en scène le test de divisibilité par 4. Comme *abcd* est divisible par 4, *cd* est aussi divisible par 4. Avec *c* est impair et *d* pair (en vertu du paragraphe précédent), les seules options possibles pour *cd* sont 12, 16, 32, 36, 72, 76, 92 et 96. En particulier, *d* vaut 2 ou 6.

Selon le test de divisibilité par 3, si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, alors ce nombre est aussi divisible par 3. Mais il fonctionne aussi dans l'autre sens : si un nombre est divisible par 3, il en va de même pour la somme de ses chiffres.

Donc, $a + b + c$ est divisible par 3.

Tout ce qui est divisible par 6 est aussi divisible par 3, si bien que $a + b + c + d + e + f$ est aussi divisible par 3.

Si deux nombres sont divisibles par 3, le plus petit ôté au plus grand donne aussi un nombre divisible par 3.

Ainsi $a + b + c + d + e + f - (a + b + c) = d + e + f$ est divisible par 3.

Or *d* vaut 2 ou 6, *e* vaut 5 et *f* vaut 2, 4, 6 ou 8.

Si *d* est 2, alors $2 + 5 + f$ doit être divisible par 3, d'où $f = 8$. (Le chiffre *f* ne peut valoir 2, option déjà prise par *d*, ni 4 ou 6, car 11 et 13 ne sont pas divisibles par 3.)

Si *d* est 6, alors $6 + 5 + f$ doit être divisible par 3, d'où, par le même raisonnement que ci-dessus, $f = 4$.

Deux possibilités se dégagent dont pour les trois chiffres du milieu : 258 ou 654. Essayons-les tour à tour.

[1] *def* = 258.

Par le test de divisibilité par 8, si un nombre à huit chiffres *abcdefgh* est divisible par 8, alors le nombre à trois chiffres *fgh* est aussi divisible par 8.

Donc 8*gh* est aussi divisible par 8.

L'inconnue *g* vaut donc 1, 3, 7 ou 9, et *h* l'un des nombres pairs encore disponibles, à savoir 4 ou 6. Comme le nombre 8g4 n'est jamais divisible par 8 quelle que soit la valeur de *g*, *h* = 6. Le chiffre *b* prend alors la seule valeur paire encore disponible, à savoir 4.

À ce stade, notre nombre a la forme suivante : *a*4*c*258*g*6*i*0.

Tout ce qui est divisible par 9 doit aussi être divisible par 3. Donc *a* + 4 + *c* + 2 + 5 + 8 + *g* + 6 + *i* est divisible par 3. Comme tout ce qui est divisible par 6 doit aussi être divisible par 3, nous savons que *a* + 4 + *c* + 2 + 5 + 8 est aussi divisible par 3. Comme nous l'avons vu plus haut, si deux nombres sont divisibles par trois, le plus petit ôté du plus grand donne encore un nombre divisible par 3. Donc *g* + 6 + i doit être divisible par 3. Donc *g* + *i* doit être divisible par 3. Comme les valeurs de *g* et *i* sont à choisir entre 1, 3, 7 ou 9, *g* et *i* se répartissent entre 3 et 9. Donc *a* et *c* se répartissent entre 1 et 7, les impairs restants. Quatre possibilités se dégagent alors pour le nombre final, en fonction des valeurs de *a*, *c*, *g* et *i* :

1, 7, 3, 9 (aboutissant au nombre 1472583690)

7, 1, 3, 9 (aboutissant au nombre 7412583690)

1, 7, 9, 3 (aboutissant au nombre 1472589630)

7, 1, 9, 3 (aboutissant au nombre 7412589630)

À l'aide de votre calculette, vous vérifierez qu'aucun de ces nombres ne satisfait à la totalité des conditions stipulées dans l'énoncé. Plus précisément :

1472583690 ne convient pas car 14725836 n'est pas divisible par 8.

7412583690 ne convient pas car 7412583 n'est pas divisible par 7.

1472589630 ne convient pas car 1472589 n'est pas divisible par 7.

7412589630 ne convient pas car 7412589 n'est pas divisible par 7.

Impasse. Conclusions : *def* ne vaut pas 258.

[2] *def* = 654.

Selon le test de divisibilité par 8, si un nombre à huit chiffres *abcdefgh* est divisible par 8, alors le nombre à trois chiffres *fgh* est aussi divisible par 8.

Donc 4*gh* est divisible par 8.

Comme 4*gh* = 400 + gh, et que 400 est divisible par 8, *gh* est aussi divisible par 8. Nous savons par ailleurs que le chiffre *g* vaut 1, 3, 7 ou 9 et *h* l'un des nombres pairs restants, 2 ou 8. Comme le nombre *gh* n'est pas divisible par 8 quand *h* vaut 8, *h* vaut 2. Donc *b* vaut 8. Notre nombre affecte alors la forme suivante : *a*8*c*654*g*2*i*0.

Tout ce qui est divisible par 9 doit être divisible par 3. Donc *a* + 8 + *c* + 6 + 5 + 4 + *g* +2 + *i* est divisible par 3, et, par le même raisonnement que ci-dessus, nous savons que *g* + 2 + *i* est divisible par 3, avec *i* et *g* à choisir entre 1, 3, 7 ou 9. Les options pour *g* et *i* sont donc les suivantes :

1 et 3,
3 et 1,
1 et 9,
9 et 1,
3 et 7,
7 et 3,
7 et 9,
9 et 7.

Passons ces possibilités en revue et, aidés de la calculette, testons si ces nombres vérifient toutes les règles stipulées dans l'énoncé.

1 et 3 :
7896541230 – ne convient pas car 7896541 n'est pas divisible par 7.
9876541230 – ne convient pas car 9876541 n'est pas divisible par 7.

3 et 1 :
7896543210 – ne convient pas car 7896543 n'est pas divisible par 7.
9876543210 – ne convient pas car 9876543 n'est pas divisible par 7.

1 et 9 :
7836541290 – ne convient pas car 7836541 n'est pas divisible par 7.
3876541290 – ne convient pas car 3876541 n'est pas divisible par 7.

9 et 1 :
7836549210 – ne convient pas car 783654 n'est pas divisible par 6.
3876549210 – ne convient pas car 3876549 n'est pas divisible par 7.

3 et 7 :
1896543270 – ne convient pas car 1896543 n'est pas divisible par 7.
9816543270 – ne convient pas car 9816543 n'est pas divisible par 7.

7 et 3 :
1896547230 – ne convient pas car 1896547 n'est pas divisible par 7.
9816547230 – ne convient pas car 9816547 n'est pas divisible par 7.

7 et 9 :

1836547290 – ne convient pas car 1836547 n'est pas divisible par 7.

3816547290 – **convient.**

9 et 7 :

1836549270 – ne convient pas car 1836549 n'est pas divisible par 7.

3816549270 – ne convient pas car 3816549 n'est pas divisible par 7.

Nous avons finalement mis la main sur notre nombre : 3816547290.

120. 1089 et son ordre (p. 205)

Il s'agit donc de trouver les valeurs des chiffres a, b, c et d vérifiant $abcd \times 4 = dcba$.

L'expression $abcd$ ne signifie pas a $\times$ b $\times$ c $\times$ d, mais que a occupe la colonne des milliers, b la colonne des centaines, c la colonne des dizaines et d la colonne des unités. L'équation ci-dessus se développe donc en :

$(1000a + 100b + 10c + d) \times 4 = 1000d + 100c + 10b + a$.

Le travail consiste maintenant à trouver une façon astucieuse de simplifier l'équation afin de la résoudre.

Étape 1. Déduction de a.

Comme le membre gauche de l'équation, multiple de 4, est pair, il en va de même pour le membre droit. Et que $1000d + 100c + 10b$ soit également pair implique que a soit pair. Le membre gauche de l'équation pose en outre une limite sur la valeur de a par le fait que $4000a$ doit être inférieur à 9999. (Sinon le membre droit formerait un nombre à cinq chiffres.) Comme 2 est le seul nombre à satisfaire cette condition, $a = 2$.

Étape 2. Déduction de d.

Comme $a = 2$, le membre gauche de l'équation vaut au moins 8000, d'où $d = 8$ ou $d = 9$. Mais si $d = 9$, le chiffre des unités serait 6, puisque $9 \times 4 = 36$. Or ce chiffre des unités doit être 2, puisque $a = 2$ du côté droit. Donc $d = 8$.

En remplaçant les valeurs obtenues dans l'équation originale :

$(2000 + 100b + 10c + 8) \times 4 = 8000 + 100c + 10b + 2$.

En développant puis en réduisant :

$8032 + 400b + 40c = 8002 + 100c + 10b$.

En réduisant encore :

$390b + 30 = 60c$.

En réduisant toujours :

$13b + 1 = 2c$.

Or b et c sont des simples chiffres. Que c vaille 9 au maximum signifie que $2c$ vaut au maximum 18, ce qui restreint la valeur de b à 1. Et si $b = 1$, $c = 7$.

Le nombre recherché est donc 2718 : $2178 \times 4 = 8712$.

121. Et le dernier sera le premier (p. 206)

Nous cherchons un nombre qui, après doublement, voit son dernier chiffre prendre la place du premier. Freeman Dyson nous a heureusement aidés en précisant que le plus petit nombre vérifiant cette propriété comporte 18 chiffres. Soit donc le nombre $nnnnnnnnnnnnnnnnn_D$, où chaque n désigne un chiffre, et n_D le chiffre le plus à droite.

Nous savons que :

$$\begin{array}{r} nnnnnnnnnnnnnnnnn_D \\ \times\, 2 \\ \hline n_D nnnnnnnnnnnnnnnn \\ \hline \end{array}$$

Quel chiffre peut correspondre à n_D ? Pas 0, ce qui donnerait un nombre à 17 chiffres, tout en rendant la multiplication impossible. Pas 1 non plus, car la moitié d'un nombre à 18 chiffres commençant par 1 est un nombre à 17 chiffres. Mais nous pouvons essayer avec 2.

La multiplication s'écrit alors :

$$\begin{array}{r} nnnnnnnnnnnnnnnn2 \\ \times\ 2 \\ \hline 2nnnnnnnnnnnnnnnn \\ \hline \end{array}$$

Il est possible de compléter cette équation par déduction des valeurs des n. Comme $2 \times 2 = 4$, nous savons que le dernier chiffre du nombre inférieur doit être 4.

$$\begin{array}{r} nnnnnnnnnnnnnnnn2 \\ \times\ 2 \\ \hline 2nnnnnnnnnnnnnnnn4 \\ \hline \end{array}$$

Ce nombre inférieur est formé des mêmes chiffres dans le même ordre que le nombre supérieur, à cette exception près que le dernier chiffre du nombre supérieur est le premier du nombre inférieur. Il s'ensuit que le dernier chiffre du nombre inférieur est identique à l'avant-dernier chiffre du nombre supérieur. L'avant-dernier chiffre du nombre supérieur est donc 4.

$$\begin{array}{r} nnnnnnnnnnnnnnnn42 \\ \times\ 2 \\ \hline 2nnnnnnnnnnnnnnnn4 \\ \hline \end{array}$$

Comme 4 × 2 = 8, l'avant-dernier chiffre du nombre inférieur, et par là l'avant-avant-dernier chiffre du nombre supérieur doit être 8.

$$\begin{array}{r} n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,842 \\ \times\, 2 \\ \hline 2\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,84 \\ \hline \end{array}$$

Tous nos calculs font appel à la table de multiplication par 2. L'opération suivante, 8 × 2 = 16, produit un 6 en position suivante, c'est-à-dire au troisième chiffre en partant de la fin du nombre inférieur ou au quatrième en partant de la fin du nombre supérieur, ainsi qu'une retenue.

$$\begin{array}{r} n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,6842 \\ \times\, 2 \\ \hline 2\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,684 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \\ \hline \end{array}$$

Le *n* suivant se calcule par 6 × 2 = 12, plus la retenue précédente, soit 13. Le quatrième chiffre en partant de la fin du nombre inférieur ou le cinquième en partant de la fin du nombre supérieur est donc 3, avec là encore de côté une retenue de 1.

$$\begin{array}{r} n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,36842 \\ \times\, 2 \\ \hline 2\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,3684 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \\ \hline \end{array}$$

En continuant ainsi à multiplier et à construire pas à pas les nombres, la procédure aboutira impeccablement à :

$$\begin{array}{r} 105263157894736842 \\ \times\ 2 \\ \hline 210526315789473684 \end{array}$$

Nous avons donc notre solution : doubler 105 263 157 894 736 842 produit un nombre identique au dernier chiffre prenant la place du premier près.

Si nous étions partis de 3 pour dernier chiffre, nous aurions de même construit 157 894 736 842 **105 263**, un nombre qui, produisant 315 789 473 684 210 526 quand il est doublé, constitue une solution alternative. Les chiffres marqués en gras montrent que cet autre nombre contient une chaîne de chiffres déjà présente dans le précédent. Il est aussi possible de générer des solutions se terminant par 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

122. Puissance neuf (p. 207)

J'espère que vous n'avez pas essayé de calculer toutes ces puissances, ou, dans le cas contraire, que vous avez remarqué cette propriété : le dernier chiffre de la puissance neuvième d'un nombre est toujours le dernier chiffre de ce nombre.

Le classement recherché est donc : 067**1**, 883**2**, 195**3**, 646**4**, 187**5**, 841**6**, 507**7**, 284**8**, 875**9**.

Voici un tableau récapitulant le comportement du dernier chiffre lors d'une montée en puissance progressive :

Dernier chiffre de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Dernier chiffre de n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
Dernier chiffre de n^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
Dernier chiffre de n^5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de n^6	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Dernier chiffre de n^7	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
Dernier chiffre de n^8	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
Dernier chiffre de n^9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ce tableau montre notamment que le dernier chiffre de la puissance neuvième de tout nombre est identique au dernier chiffre du nombre en question – ainsi qu'au dernier chiffre de sa puissance cinquième. Cette propriété de présenter le même dernier chiffre que le nombre original est en fait caractéristique des puissances cinquième, neuvième, treizième, ainsi de suite en ajoutant toujours quatre.

123. À peu près (p. 207)

Le nombre 2^{64} correspond au nombre 2 multiplié 64 fois par lui-même, soit encore au 64e terme de la suite de doublement commençant par 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024…

Rien que de très familier jusque-là. Nous pourrions certes continuer ainsi pour les 54 termes suivants, mais les calculs deviendraient vite extrêmement pénibles et conduiraient inévitablement à des erreurs…

Nous cherchons un moyen d'approcher le résultat sans passer par trop de calculs. Attendez… Le dixième terme, 2^{10}, vaut 1 024. À peu près 1 000, un beau chiffre rond.

Si 1 000 vaut à peu près 2^{10}, 1000 multiplié 6 fois par lui-même, soit 1000^6, vaut alors 2^{10} multiplié 6 fois par lui-même, soit $(2^{10})^6 = 2^{60}$.

Or $1\,000^6$ = 1 000 000 000 000 000 000, ou un trillion.

Ainsi 2^{60} vaut en gros un trillion.

Comme par ailleurs $2^4 = 16$, $2^{64} = 2^{60} \times 2^4$, soit à peu près 16 trillions.

Quoique cette estimation de seize trillions ne soit déjà pas mauvaise, nous pouvons l'améliorer en ajustant l'erreur d'arrondi.

En approchant 1 024 par 1 000, nous avons en effet procédé à une diminution de 2,4 %. Et chaque fois que nous multiplions 1 000 par lui-même, nous procédons à une diminution de 2,4 % supplémentaire. En multipliant 1 000 six fois par lui-même, nous diminuons six fois de 2,4 %, soit une diminution cumulée d'environ 15 %. Une meilleure estimation de 2^{64} est donc de 16 trillions + 15 %.

Combien vaut 15 % de 16 trillions ? Le calcul se fait de tête : 10 % donne 1,6 trillion, auquel il faut ajouter 5 %, c'est-à-dire la moitié du résultat précédent, soit 0,8 trillion. Ajouter 15 % correspond donc à 2,4 trillions supplémentaires.

Estimation finale : (16 + 2,4) trillions = 18,4 trillions.

Pas si mal, comparé au résultat exact : 18 446 744 073 709 551 616.

124. Nuls ! (p. 208)

Que représente un 0 à la fin d'un nombre ? Facile ! Un nombre qui se termine par 0 est divisible par 10. Un nombre qui se termine par 00 est divisible par 100, soit 10 × 10. Un nombre qui se termine par 000 est divisible par 1 000 soit 10 × 10 × 10. En d'autres termes, les 0 à la fin d'un nombre indiquent le nombre de fois que ce nombre est divisible par 10. Le problème revient donc à déterminer combien de fois 100 ! se divise par 10.

Partons de 100 ! = 100 × 99 × 98 × 97 × … × 3 × 2 × 1 et passons les termes en revue afin de déterminer les facteurs de divisibilité par 10. Il y a d'abord 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 et 100, soit une production de onze 0 à la fin de 100 ! (100 avec ces deux 0 compte pour deux).

Les choses ne sont toutefois pas aussi simples, car la multiplication de deux nombres qui ne se terminent pas par 0 donne parfois un résultat qui le fait. Comme 8 × 5 = 40, 4 × 15 = 60, 6 × 25 = 150…

Comment nous assurer de détecter tous les 0 créés en multipliant des nombres qui ne se terminent pas par 0 ? Regardons de plus près la décomposition des exemples précédents :

8 × 5 = (2 × 2 × 2) × 5, ce qui se réarrange en (2 × 2) × (2 × 5) = 4 × 10.

De même :

4 × 15 = (2 × 2) × (3 × 5) = (2 × 3) × (2 × 5) = 6 × 10

6 × 25 = (3 × 2) × (5 × 5) = (3 × 5) × (2 × 5) = 15 × 10

Quand la multiplication de deux nombres qui ne se terminent pas par 0 donne un résultat qui le fait, un 2 et un 5 entrent dans la décomposition de ces nombres. Et cela parce que un 2 et un 5 qui apparaissent dans une suite de multiplications s'apparient pour produire 10.

Le problème initial revient à rechercher les paires de 2 et 5 dans la décomposition de 100 !

Nous pouvons même le simplifier encore un peu en remarquant que nous recherchons plus fondamentalement le nombre de fois que 5 divise 100 ! : en effet, 2 divisant 100 ! bien plus souvent que 5, le nombre de paires de 2 et 5 est égal au nombre de 5.

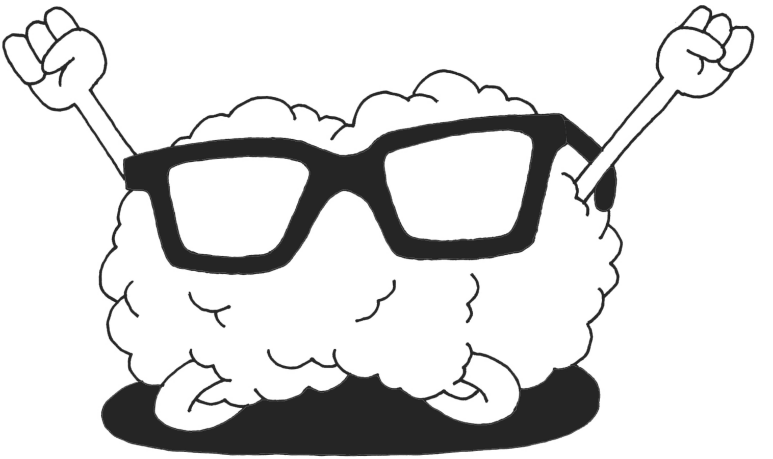
Combien de fois 5 divise-t-il les nombres de 1 à 100 ? En partant de 1, 5 divise les nombres suivants :

5, 10, 15, 20, 25 … 90, 95, 100.

Et ces vingt termes sont divisibles une seule fois par 5 à l'exception de 25, 50, 75 et 100 qui le sont deux fois. Donc 5 divise vingt-quatre fois 100 ! au total.

Conclusion : 100 ! se termine par vingt-quatre 0.

Au cas où vous souhaiteriez vérifier ce résultat, voici le nombre entier : 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000 000



Liste des casse-tête avec indication de source

Les casse-tête présentés dans ce livre ont été empruntés ou adaptés d'ouvrages dont voici la liste. Il ne s'agit pas toujours des sources premières. J'ai parfois changé les titres des problèmes. Un astérisque (*) signale une formulation directement reprise (ou traduite) de l'originale.

Tout a été fait pour retrouver les détenteurs des copyrights. Les requêtes éventuelles doivent être adressées à l'éditeur.

En plus des livres mentionnés plus bas, je dois énormément aux formidables références suivantes :

• les *Sources in Recreational Mathematics* (« Sources en mathématiques récréatives »), de David Singmaster, qui, quoique non publiées, se trouvent facilement en ligne ;

• le site www.cut-the-knot.org d'Alexander Bogomolny ;

• et le site *MacTutor History of Mathematics Archive* de l'université de St Andrews.

Introduction (p. 9)

Arborescence numérique : Nobuyuki Yoshigahara *Puzzles 101*, AK Peters/CRC Press (2003).

Les canaux de Mars : Sam Loyd. Martin Gardner (éd.), *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd*, trad. F. Rostas et Ph. Gatbois, Dunod (1984).

Problèmes logiques

En guise d'apéritif. Êes-vous plus intelligent qu'un enfant de 11 ans ? (p. 18)

Tous les problèmes © United Kingdom Mathematics Trust [avec adaptation du traducteur sur le n° 3].

Des choux, des époux infidèles et un zèbre (p. 21)

1. Un loup, une chèvre et des choux : Alcuin, *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (IXe siècle), traduit du latin en français par Charles-É. Jean, www.recreomath.qc.ca/art_alcuin.htm.

2. * De trois hommes et de leurs sœurs : Alcuin, *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (IXe siècle), traduit du latin en français par Charles-É. Jean, www.recreomath.qc.ca/art_alcuin.htm.

3. Le pont suspendu : William Poundstone, *How Would You Move Mount Fuji ?*, Little Brown and Co (2003).

4. De deux mariages : Alcuin, *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (IXe siècle), traduit du latin en français par Charles-É. Jean, www.recreomath.qc.ca/art_alcuin.htm.

5. * Le dîner intime : Lewis Carroll, *Un conte embrouillé*, trad. J.-P. Richand, Gallimard (1990).

6. Menteurs, menteurs : Lewis Carroll in Martin Gardner, *The Universe in a Handkerchief*, Copernicus (1996).

7. Smith, Jones et Robinson : Henry Ernest Dudeney, *Strand Magazine* (avril 1930).

8. * L'école des craques : Hubert Phillips, S. T. Shovelton, G. Struan Marshall, *Caliban's Problem Book*, T. De La Rue (1933).

9. * Une affaire de parenté : Hubert Phillips, S. T. Shovelton, G. Struan Marshall, *Caliban's Problem Book*, T. De La Rue (1933).

10. Le casse-tête du zèbre : *Life International* (17 décembre 1962).

11. * Le testament de Caliban : Hubert Phillips, S. T. Shovelton, G. Struan Marshall, *Caliban's Problem Book*, T. De La Rue (1933).

12. Le truel : Hubert Phillips, *Question Time*, J. M. Dent (1937).

13. Pommes et oranges : William Poundstone, *How Would You Move Mount Fuji ?*, Little Brown and Co. (2003).

14. Sel, poivre et vinaigrette : d'après Martin Gardner, *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Dover Publications (1994).

15. Pierre, papier, ciseaux : Yoshinao Katagiri in Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, A K Peters/CRC Press (2003).

16. Bains de boue : Hubert Phillips, *Week-End*, pris dans Hans van Ditmarsch, Barteld Kooi, *One Hundred Prisoners and a Light Bulb*, Springer (2015).

17. Trois visages tachés de suie : George Gamow, Marvin Stern, *Jeux mathématiques*, trad. G. Guéron, Dunod (1961).

18. Quarante maris infidèles : George Gamow, *Jeux mathématiques*, trad. G. Guéron, Dunod (1961).

19. Carton à chapeaux : Kobon Fujimura, *The Tokyo Puzzles*, Biddles Ltd (1978).

20. Nombres consécutifs : Hans van Ditmarsch, Barteld Kooi, *One Hundred Prisoners and a Light Bulb*, Copernicus (2015), d'après J. E. Littlewood, *A Mathematician's Miscellany*, Methuen and Co. Ltd (1953).

21. L'anniversaire de Cheryl : Joseph Yeo Boon Wooi, Singapore and Asian Schools Math Olympiad.

22. L'anniversaire de Denise : Joseph Yeo Boon Wooi, theguardian.com.

23. Les âges des enfants : Auteur inconnu.

24. * Des génies dans un bus : John Horton Conway, Tanya Khovanova, « Conway's Wizards », *The Mathematical Intelligencer*, vol. 35 (2013).

25. Jeu de voyelles : Peter Wason, « Tâche de sélection de Wason », Wikipédia.

Problèmes géométriques

En guise d'apéritif. Êes-vous un génie aux jeux de lettres ? (p. 58)

Les questions 1, 3, 5, 7 et 9 sont des exemples du jeu HIPE, inventé par Peter Winkler et présentés dans son livre *Mathematical Mind-Benders*, AK Peters/CRC Press (2007). [Les nº 1, 3 et 7 ont été adaptés en français par le traducteur.]

Les questions 2 et 4 se trouvent en de nombreux endroits. Je les ai vues pour la première fois dans Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, AK Peters/CRC Press (2003). [La nº 2 a été adaptée en français par le traducteur.]

Question 6 : David Singmaster, *Puzzles for Metagrobologists*, World Scientific (2006). [Adaptée en français par le traducteur.]

Questions 8 et 10 : Auteur inconnu. [La nº 8 a été adaptée en français par le traducteur.]

Un homme marche tout autour d'un atome… (p. 61)

26. À la règle seule : The Grabarchuk Family, *The Big, Big, Big Book of Brainteasers*, Puzzlewright (2011).

27. Une corde tout autour de la Terre : Auteur inconnu.

28. La rue enguirlandée : d'après une conversation avec Colin Wright.

29 En selle, Sherlock ! : Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman, Stan Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go ?*, The Mathematical Association of America (1997).

30. Maths floues : d'après une idée piochée dans Joseph D. E.Konhauser, Dan Velleman, Stan Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go ?*, The Mathematical Association of America (1997).

31. Des tours de cercles : *New York Times* (25 mai 1982).

32. Huit carrés bien ordonnés : Kobon Fujimura, *The Tokyo Puzzles*, Biddles Ltd (1978).

33. Deux moitiés de carré : Kobon Fujimura, *The Tokyo Puzzles*, Biddles Ltd (1978).

34. L'aile et la lentille : Kobon Fujimura, *The Tokyo Puzzles*, Biddles Ltd (1978).

35. Sangaku de cercles : H. Fukagawa, A. Rothman, *Sacred Mathematics : Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press (2008).

36. Sangaku du triangle : H. Fukagawa, A. Rothman, *Sacred Mathematics : Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press (2008).

37. Cheminement sur tatamis : Kobon Fujimura, *The Tokyo Puzzles*, Biddles Ltd (1978).

38. Quinze tatamis : Donald Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley (1968).

39. Les tapis de Nob : Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, A K Peters/CRC Press (2003).

40. Autour d'escaliers : d'après l'article Mutilated Chessboard Problem (Le problème de l'échiquier mutilé), auteur inconnu, Wikipédia.

41. Escaliers aléatoires : d'après l'article Mutilated Chessboard Problem (Le problème de l'échiquier mutilé), auteur inconnu, Wikipédia.

42. Une structure en bois : Suggéré par Joseph Yeo Boon Wooi.

43. Le tableau sur le mur : Peter Winkler, *Mathematical Mind-Benders*, A K Peters/CRC Press (2007).

44. Un rond de serviette remarquable : Martin Gardner, *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Dover Publications (1994).

45. Aire mystérieuse : © Naoki Inaba.

46. Shikaku : © Nikoli.

47. Slitherlink : © Nikoli.

48. Herugolf : © Nikoli.

49. Akari : © Nikoli.

50. Le cabinet noir : Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman, Stan Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go ?*, The Mathematical Association of America (1997).

Problèmes pratiques

En guise d'apéritif. Êes-vous plus intelligent qu'un enfant de 12 ans ? (p. 107)

Tous les problèmes © United Kingdom Mathematics Trust.

Satanées volailles (p. 111)

51. Cent volailles : David Singmaster, *Sources in Recreational Mathematics*.

52. Cent volatiles : Abu Kamil, « Sur les volatiles », *in* Abu Kamil, *Algèbre et analyse diophantienne*, éd. et trad. R. Rashed, De Gruyter (2012).

53. Ouvert de sept à onze : Auteur inconnu.

54. Les trois cruches : Abbé Albert de Stade, *Annales Stadenses* (XIIIe siècle).

55. Les deux seaux : Adapté du problème des trois cruches.

56. Le café au lait : Auteur inconnu.

57. Eau et vin : Martin Gardner, *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Dover Publications (1994).

58. Un quart d'heure de célébrité : Yuri B. Chernyak, Robert M. Rose, *Les Poulets de Minsk*, trad. de Ch. Jeanmougin, Masson (1996).

59. Les chronomèches : (i) Auteur inconnu. (ii) « Time to Burn », Varsity Math week 25, *Wall Street Journal* ; and MoMath.org.

60. La pièce biaisée : Attribué à John von Neumann.

61. Deux tas de farine : d'après Boris A. Kordemsky, *The Moscow Puzzles*, Dover Publications (1955).

62. Le problème des poids de Bachet : Claude-Gaspard Bachet, *Problèmes plaisants & délectables qui se font par les nombres*, 5e éd., A. Blanchard (1993).

63. La pièce contrefaite : Boris A. Kordemsky, *The Moscow Puzzles*, Dover Publications (1955).

64. La fausse pile : Martin Gardner, *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Dover Publications (1994).

65 Du Havre à New York : Charles-Ange Laisant, *Initiation mathématique*, Hachette (1915).

66. Le vol aller-retour : *Êes-vous assez intelligent pour travailler chez Google ?*, trad. Bernard Sigaud, J.-C. Lattès (2013).

67. Les deux compteurs : Harry Nelson in Scott Kim, *The Little Book of Big Mind Benders*, Workman Publishing (2014).

68. Le dépassement : Dick Hess, *Mental Gymnastics*, Dover Publications (2011).

69. Stratégies de course : Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman, Stan Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go ?*, The Mathematical Association of America (1997).

70. Les pommes de terre desséchées : Auteur inconnu.

71. La bonne paye : W. W. Rouse Ball, *Récréations et problèmes mathématiques*, trad. J. Fitz-Patrick, A. Hermann (1898).

72. La courte paille : Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*, Dover Publications (1965).

73. Poignées de mains : Auteur inconnu.

74. Poignées de mains et embrassades : The Grabarchuk Family, *The Big, Big, Big Book of Brainteasers*, Puzzlewright (2011).

75. Le ticket perdu : Peter Winkler, *Mathematical Puzzles*, AK Peters/CRC Press (2003).

Problèmes avec accessoires

En guise d'apéritif. Êes-vous un génie en géographie ? (p. 141)

L'idée de proposer des questions de géographie dans un livre de casse-tête mathématique est empruntée à Peter Winkler, qui a fait la même chose dans des *Mathematical Puzzles*, AK Peters/CRC Press (2003). Certaines de mes questions ont été inspirées des siennes, et toutes demandent le même gendre de pensée mathématique. [Les n° 3 et 7 ont été adaptés en français par le traducteur].

Comment planter neuf arbres ? (p. 143)

Les quatre pièces : H. E. Dudeney, *536 Puzzles & Curious Problems*, Scribner Book Co. (1983).

76. Les six pièces : H. E. Dudeney, *536 Puzzles & Curious Problems*, Scribner Book Co. (1983).

77. Du triangle à la droite : Erik Demaine, Martin Demaine, « Sliding Coin Puzzles », in *Tribute to a Mathemagician*, AK Peters/CRC Press (2004).

78. Histoire d'eau : Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, AK Peters/CRC Press (2003), et Erik Demaine et Martin Demaine, « Sliding Coin Puzzles », in *Tribute to a Mathemagician*, A K Peters/CRC Press (2004).

79. * Les cinq pennies : H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Project Gutenberg (1958), et Kobon Fujimura, *The Tokyo Puzzles*, Biddles Ltd (1978).

80. Savez-vous planter dix arbres ? : H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Project Gutenberg (1958).

81. La course à l'espace : H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Project Gutenberg (1958).

82. La colle de Tait : P. G. Tait, Introductory Address to the Edinburgh Mathematical Society, 9 novembre 1883, *Philosophical Magazine* (janvier 1884). Casse-tête supplémentaire : Martin Gardner, *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Dover Publications (1994).

83. Les quatre piles : Édouard Lucas, *Récréations mathématiques*.

84. Grenouilles et crapauds : Édouard Lucas, *Récréations mathématiques*.

85. Solitaire triangulaire : Martin Gardner, *Mathematical Carnival*, Alfred A. Knopf (1975).

86. Pièces dans le noir : Auteur inconnu.

87. Les cent pièces : Gyula Horváth, International Olympiad in Informatics 1996, in Peter Winkler, *Mathematical Puzzles*, AK Peters/CRC Press (2003).

88. Libérez la pièce : Jack Botermans, *Matchstick Puzzles*, Sterling (2007).

89. Élagage de triangles : H. E. Dudeney, *536 Puzzles & Curious Problems*, Scribner Book Co. (1983).

90. Des triangles, encore des triangles, toujours des triangles : Kobon Fujimura, *The Tokyo Puzzles*, Biddles Ltd (1978).

91. Triangles en extension : [1] The Grabarchuk Family, *The Big, Big, Big Book of Brainteasers*, Puzzlewright (2011). [2] Auteur inconnu.

92. À touche-touche : Martin Gardner, *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Dover Publications (1994).

93. Point à point : Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman, Stan Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go ?*, The Mathematical Association of America (1997).

94. Les deux enclos : H. E. Dudeney, *536 Puzzles & Curious Problems*, Scribner Book Co. (1983).

95. Pliage de timbres : H. E. Dudeney, *536 Puzzles & Curious Problems*, Scribner Book Co. (1983).

96. Les quatre timbres : H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Project Gutenberg (1958).

97. L'échiquier brisé : H. E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, E. P. Dutton and Co. (1908).

98. Pliage cubique : Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, A K Peters/CRC Press (2003).

99. La tresse impossible : Auteur inconnu.

100. Tangloïdes : Martin Gardner, *Nouveaux divertissements mathématiques*, trad. C. Roux, Dunod, 1970.

Problèmes pour puristes

En guise d'apéritif. Êes-vous plus intelligent qu'un enfant de 13 ans ? (p. 178)

Tous les problèmes © United Kingdom Mathematics Trust [avec adaptation du traducteur sur le n° 5].

Jeux numériques (p. 181)

101. Miroir, Miroir : Boris A. Kordemsky, *The Moscow Puzzles*, Dover Publications (1955).

102. Dans l'esprit de Gauss : Derrick Niederman, *Math Puzzles for the Clever Mind*, Sterling (2001).

103. La table d'addition : Anany Levitin, Maria Levitin, *Algorithmic Puzzles*, Oxford University Press (2011).

104. Le carré de chiffres : Kobon Fujimura, *The Tokyo Puzzle*s, Biddles Ltd (1978).

105. Les équations fantômes : Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, AK Peters/CRC Press (2003).

106. Le numéro que vous avez demandé… : Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, AK Peters/CRC Press (2003).

107. Les quatre quatre : Merci pour les solutions à http://mathforum.org/ruth/four4s.puzzle.html.

108. Notre œuf de Colomb : Sam Loyd in Martin Gardner (éd.), *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover Publications (1960).

109. Des trois et des huit : Auteur inconnu.

110. Un jeu d'enfant : Auteur inconnu.

111. Suivez la flèche (I) : Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, AK Peters/CRC Press (2003).

112 Suivez la flèche (II) : Nobuyuki Yoshigahara, *Puzzles 101*, AK Peters/CRC Press (2003).

113. Suivez la flèche (III) : William Poundstone, *Are You Smart Enough to Work at Google ?*, Little, Brown and Co. (2012). J-C Lattès (2013) [Adapté par le traducteur]

114. Le coin du dictionnaire : Dick Hess, *Mental Gymnastics*, Dover Publications (2011). [Adapté en anglais par le traducteur]

115. Le carré de valets : Louis Thépault, *Pour le plaisir de se casser (encore plus) la tête*, Dunod, 2005. [ex. Mike Keith, www.cadaeic.net/alphas.htm.]

116. Pairs et impairs : Martin Gardner, *Le Paradoxe du pendu et autres divertissements mathématiques*, trad. C. Roux, Dunod, 1971.

117. L'autobiographie à dix chiffres : Martin Gardner, *Math' Circus*, trad. J.-P. Labrique, Pour la Science (1982).

118. Pandémonium pandigital : Ivan Moscovich, *The Big Book of Brain Games*, Workman Publishing (2006).

119. Pandigital et pandivisible : Auteur inconnu.

120. 1089 et son ordre : Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman, Stan Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go ?*, The Mathematical Association of America (1997).

121. Et le dernier sera le premier : *New York Times* online (6 avril 2009).

122. Puissance neuf : Derrick Niederman, *Math Puzzles for the Clever Mind*, Sterling (2001).

123. À peu près : William Poundstone, *Êtes-vous assez intelligent pour travailler chez Google ?*, trad. Bernard Sigaud, J.-C. Lattès (2013).

124. Nuls ! : William Poundstone, *Êtes-vous assez intelligent pour travailler chez Google ?*, trad. Bernard Sigaud, J.-C. Lattès (2013).

Remerciements

Un immense merci au Mathematics Trust du Royaume-Uni et à sa directrice, Rachel Greenhalgh, qui m'ont permis de reprendre des énoncés de leurs Junior Challenges dans les sections *En guise d'apéritif*. Cette formidable organisation caritative donne l'opportunité à des centaines de milliers d'enfants de mieux connaître et apprécier les mathématiques par l'organisation de compétitions nationales, ainsi que par l'entraînement des meilleurs candidats en vue des Olympiades internationales de mathématiques. Environ 300 000 jeunes Britanniques âgés de 11 à 13 ans participent au Junior Challenge chaque année. Pour plus d'information et de ressources, visitez le site Internet www.ukmt.org.uk.

Merci aussi aux nombreux mathématiciens, experts en casse-tête, concepteurs et amateurs avec qui je me suis entretenu durant la rédaction de mon blog et les recherches pour ce livre, et spécialement David Singmaster, Tanya Khovanova, Joseph Yeo Boon Wooi, Colin Wright, Naoki Inaba, Maki Kaji, Jimmy Goto, Dick Hess, Gary Foshee, John Conway, Colin Beveridge, Adam P. Goucher, Hans van Ditmarsch, Lee Sallows, Mike Keith, Bill Ritchie, Richard Forster, Otto Janko, James Marshall et Alejandro Erickson.

Laura Hassan, ma brillante éditrice, fut une source constante d'inspiration. Lindsay Davies a supervisé de main de maître la production de ce livre. Son esthétique élégante, incomparable parmi les ouvrages de casse-tête, doit tout à la conception graphique de Rich Carr, assisté de Ruth Murray et Ruth Rudd. Merci aussi à Andrew Joyce pour ses fantastiques illustrations. Ben Sumner est le plus intelligent des préparateurs de copie et Hamish Ironside le plus fin mathématicien des correcteurs. Chez Faber, je dois aussi beaucoup à Lauren Nicoll pour la publicité, à Lindsay Terrell pour le marketing, à Jack Murphy pour la production, à Alex Kirby pour le graphisme et à Sara Montgomery pour ce qui regarde Guardian Faber.

Toute ma reconnaissance encore à mon agent Rebecca Carter et à ses collègues Emma Parry, Rebecca Folland et Kirsty Gordon chez Janklow & Nesbit.

Respect au *Guardian* qui le premier a soutenu mon blog de casse-tête, et plus particulièrement à Tash Reith-Banks, Ian Anderson, Pete Etchells et James Randerson.

Ces amis ont aussi contribué à ce livre à leur façon ; qu'ils se triturent les neurones pour deviner en quoi : Edmund Harriss, Siobhan Roberts, Matt McAllester, Chieko Tsuneoka, Sam Cartmell et Annette Mackenzie.

Et je n'aurais enfin pas pu écrire ce livre sans l'amour et le soutien de ma femme, Natalie. Que j'aie pu y parvenir durant la première année de la vie de notre fils Zak tient autant à elle qu'à moi.

Table

Introduction 9

Problèmes logiques 17
Des choux, des époux infidèles et un zèbre

Problèmes géométriques 57
Un homme marche tout autour d'un atome…

Problèmes pratiques 105
Satanées volailles !

Problèmes avec accessoires 139
Savez-vous planter des arbres ?

Problèmes pour puristes 177
Jeux numériques

Solutions 208

Liste des casse-tête avec indication de source 371
Remerciements 382

Cet ouvrage a été mis en pages par

<pixellence>

N° d'édition : L.01EHQN001186.N001
Dépôt légal : avril 2021